Харьковский национальный университет
имени В. Н. Каразина



В. С. Рыжий, И. Г. Николенко

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

В 2 частях

Часть 2

Математика в XVII и XVIII веках

Учебное пособие

Министерство образования и науки, молодежи и спорта Украины
Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

В. С. Рыжий
И. Г. Николенко

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ

В 2 частях

Часть 2. Математика в XVII и XVIII веках

Учебное пособие

Харьков – 2011

УДК 51 (091)
ББК 22.1г
Р 93

Рецензенты:

В. А. Резуненко – кандидат физ.-мат. наук, доцент Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина;

П. З. Агранович – кандидат физ.-мат. наук, старший научный сотрудник Физико-технического института низких температур имени Б. И. Веркина НАН Украины.

Утверджено к печати решением Ученого совета Харьковского национального университета имени В. Н. Каразина (протокол № 13 от 26.10.2010)

Рижий В. С.

Р 93 Історія математики. У 2 ч. Ч. 2 : Математика в XVII і XVIII століттях : навчальний посібник / В. С. Рижий, І. Г. Ніколенко. – Х. : ХНУ імені В. Н. Каразіна, 2011. – 288 с.

ISBN 978-966-623-768-5

У частині 2 посібника викладено у хронологічній послідовності у формі нарисів біографічні відомості та основні досягнення видатних математиків XVII і XVIII століть. Подано широку бібліографію з історії математики для забезпечення самостійної роботи. Посібник призначено для студентів, викладачів і наукових працівників математичних спеціальностей.

Рыжий В. С.

Р 93 История математики. В 2 ч. Ч. 2 : Математика в XVII и XVIII веках : учебное пособие / В. С. Рыжий, И. Г. Николенко. – Х. : ХНУ имени В. Н. Каразина, 2011. – 288 с.

ISBN 978-966-623-768-5

В части 2 пособия изложены в хронологической последовательности в виде очерков биографические сведения и основные достижения выдающихся математиков XVII и XVIII веков. Приведена обширная библиография по истории математики для обеспечения самостоятельной работы. Пособие предназначено для студентов, преподавателей и научных работников математических специальностей.

УДК 51 (091)
ББК 22.1г

ISBN 978-966-623-768-5

ОТ АВТОРОВ

Общеизвестно, что знание истории математики является важным элементом математического образования. На механико-математическом факультете ХНУ имени В. Н. Каразина уже около 20 лет студентам читается курс «История математики», который вначале был спецкурсом. Однако литературы по этому предмету в библиотеках недостаточно для массового обучения, книги имеются там, в лучшем случае, в количестве нескольких экземпляров. Возникла необходимость издания, которое можно было бы использовать как пособие.

В 2003 г. доцент кафедры математического анализа ХНУ имени В. Н. Каразина В. С. Рыжий, читавший студентам курс «История математики», опубликовал книгу «История математики. Ч. 1. Математика в древности и в средние века» [210]. Она используется студентами и преподавателями механико-математического факультета. Часть 2, написанная В. С. Рыжим и доцентом кафедры математического анализа И. Г. Николенко, является продолжением указанного выше издания.

В XVII и XVIII веках произошло становление математики и механики Нового времени в их классическом виде, во многом еще неполное и без строгого обоснования, достигнутого в XIX и XX веках. Во второй части книги приведены в хронологическом порядке биографические заметки и очерки о многих математиках XVII и XVIII веков. Это позволяет ясно представить творческую роль каждого из них и постепенный процесс возникновения и развития математических понятий и дисциплин. Приведены, хотя еще и не вполне совершенные, попытки обоснования новых терминов математики в то время. Подведены краткие итоги развития математики в XVII и XVIII веках. Обширный список литературы позволяет студентам выбирать темы и материал для рефератов по истории математики и знакомиться с творчеством математиков в любом из периодов развития этой науки вплоть до середины XX века.

МАТЕМАТИКА В XVII и XVIII ВЕКАХ

Математика в XVII веке

С XVII века начинается переход от периода Средних веков, закончившегося эпохой Возрождения, к Новому времени, от эпохи феодализма к капитализму. Развитие техники, мореплавания, военного дела, механики и астрономии требовало обновления математики. С XVII в. начинается ускоренное развитие математики, особенно важнейшей ее части – математического анализа, или, как его тогда называли, анализа бесконечно малых. За один XVII век в математике было получено больше достижений, чем за предшествующие 15 веков. Этому способствовало глубокое освоение наследия древнегреческой математики, а также развитие ее методов, достигнутое ценой отказа от высокого стандарта строгости, характерного для произведений Евклида, Архимеда и Аполлония. Но особенно большое значение имело начавшееся изучение переменных величин, зависимости между которыми записывались с помощью введенной Декартом удобной символики, сохранившейся до настоящего времени. В Древней Греции Архимед разрабатывал вопросы механики, относящиеся к статике, а в XVII в. создаются основы динамики и кинематики, т. е. механики движения. В первой половине XVII в. были созданы основы аналитической геометрии. К середине XVII в. многими математиками было получено большое число отдельных результатов, относящихся к интегрированию и дифференцированию. Нужно было установить в общем виде основные понятия и правила этого нового исчисления и создать для него удобную символику. Это сделали во второй половине XVII в. Ньютон и Лейбниц, которые являются творцами основ анализа бесконечно малых, т. е. дифференциального и интегрального

исчисления. Разработка и оформление основ этого исчисления, названного впоследствии математическим анализом (в узком смысле), явилось главным событием в математике XVII в.

Галилей

Одним из основателей точного естествознания в XVII в. является замечательный итальянский механик, физик, астроном и математик **Галилео Галилей (1564–1642),** родившийся в г. Пизе, недалеко от Флоренции, в семье талантливого музыканта. В 1575 г. семья переехала во Флоренцию. Галилео воспитывался в монастыре, а в 1581–1584 гг. учился в Пизанском университете на медицинском факультете, но не окончил его, увлекшись самостоятельным изучением трудов Евклида и Архимеда. С 1589 г. преподает математику в Пизанском университете, а с 1592 г. в течении 18 лет – в университете г. Падуя, недалеко от Венеции. В 1610 г. он возвращается во Флоренцию и занимает должность «философа и первого математика» при дворе герцога тосканского Козимо II Медичи.

Галилей стремился придать естествознанию математическую трактовку. Это ярко выражено в следующем его утверждении: «Философия написана в величественной книге (я имею в виду Вселенную), которая постоянно открыта нашему взору, но понять ее может лишь тот, кто сначала научится понимать ее язык и толковать знаки, на которых она написана. Написана же она на языке математики…».

Одним из главных достижений Галилея в механике было открытие им в 1609–1610 гг. закона свободного падения тела: величина пути, пройденного свободно падающим телом, пропорциональна квадрату времени. Он установил также, что тело, брошенное под углом к горизонту, движется по параболе. Это первый пример практического применения конического сечения, отличного от окружности. Галилей открыл закон инерции, разрабатывал теорию маятника и другие вопросы механики. В одной из его работ имеются элементы теории вероятностей. Главные из его работ: «Диалог о двух главнейших системах

мира – птолемеевой и коперниковой» (1632) и «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух отраслей науки, относящихся к механике и местному движению» (1638). В «дне третьем» «Бесед» Галилей закладывает основы научной динамики. В частности, он дает определение равномерно ускоренного движения как такого, при котором «в равные промежутки времени прибавляются и равные моменты (приращения) скорости». Мы в этом случае говорим, что ускорение постоянно. Галилей проверил экспериментально, что при таком движении проходимые расстояния пропорциональны квадрату времени. Из одного из его рассуждений видно, что он знал, по крайней мере, для равномерного и равноускоренного движений, что пройденный телом путь выражается площадью под линией, изображающей скорость, т. е. что $s = \int_0^t v(t)dt$. В XIV веке это уже представлял себе Н. Орем (см. часть 1 пособия, с. 82). В работе «Звездный вестник» (1610) Галилей описал свои, первые в истории астрономии, наблюдения, полученные с помощью телескопа. Открытия Галилеем четырех спутников Юпитера, лунных кратеров, пятен на Солнце и его вращения, фаз Венеры и др. привели к революции в астрономии. За эти наблюдения Галилей в 1611 г. был избран одним из первых членов Римской академии наук (академии деи Линчеи, т. е. «рысьих» – обладающих особой зоркостью в науке), основанной в 1603 г. В 1633 г. за пропаганду теории Коперника Галилей в возрасте около 70 лет был привлечен к суду инквизиции и после четырех допросов вынужден был отречься от своих взглядов. Это постановление по делу Галилея церковь отменила лишь в 1971 г. О Галилее: [65; 71]; книга Штекли А. Галилей – М.: Мол. гвардия, 1972. – 383 с. – (серия «Жизнь замечательных людей»).

Непер и другие составители таблиц логарифмов

Крупным событием в математике явилось открытие логарифмов в начале XVII в. Первые таблицы логарифмов опубликовал в 1614 г. знаменитый шотландский математик **Джон Непер (1550–1617)** в работе «Описание

удивительных таблиц логарифмов». Сначала он составляет три продолжающие друг друга вспомогательные таблицы убывающих геометрических прогрессий вида $x_n = 10^7 a^n$ для n порядка нескольких десятков. Числа x_n убывают, начиная с $x_0 = 10^7$, и в дальнейшем играют роль аргументов, для которых Непер вычисляет свои логарифмы. Для того чтобы аргументы логарифма располагались достаточно густо, Непер берет основание a геометрических прогрессий во вспомогательных таблицах близкими к 1, а именно: $1-10^{-7}$, $1-10^{-5}$, $1-\frac{1}{2}10^{-3}$. Построения таблиц логарифмов y_n, отвечающих указанным в них значениям x_n, Непер осуществляет на основе следующего своего кинематического определения логарифма, которое выражает непрерывную зависимость между величинами, одна из которых через равные промежутки времени убывает как геометрическая прогрессия, а другая возрастает равномерно как арифметическая. Пусть OA (рис. 19) – фиксированный отрезок и OB – луч (здесь они изображены на осях прямоугольной системы координат, а Непер располагает отрезок OA и луч OB горизонтально, один под другим, и в других обозначениях, при этом график логарифма у него отсутствует). Пусть по отрезку OA от точки A к точке O движется точка M так, что расстояние OM через равные промежутки времени убывает в геометрической прогрессии. И пусть по лучу OB от точки O движется точка N с постоянной скоростью (равной начальной скорости v точки M), поэтому через равные промежутки времени расстояние ON возрастает в арифметической прогрессии. Тогда длина отрезка ON называется логарифмом Непера отрезка OM. Используя таблицы аргументов x_n логарифма и применяя некоторые оценки, вытекающие из определения логарифма, Непер составляет восьмизначные таблицы логарифмов, при этом он берет $OA=10^7$, чтобы избежать в таблицах логарифмов записей со многими знаками после запятой. Отрицательные значения логарифмов в XVII в. не рассматривались.

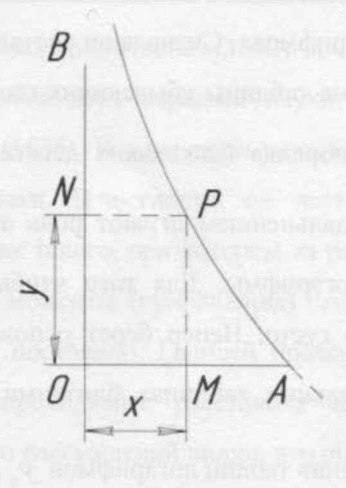


Рис. 19

С современной точки зрения логарифмы Непера определяются системой дифференциальных уравнений движения точки $P(x,y)$: $\frac{dx}{dt}=-\frac{vx}{R}$, $\frac{dy}{dt}=v$ (здесь $x=OM$, $y=ON$, $R=OA=10^7$) при начальном условии $x_0=R$, $y_0=0$. Она равносильна одному уравнению $\frac{dy}{dx}=-\frac{R}{x}$ при начальном условии $y(R)=0$. Интегрируя, получаем $y=R\ln\frac{R}{x}=R\log_{\frac{1}{e}}\left(\frac{x}{R}\right)$, где $R=10^7$. Эти формулы, где указано основание логарифмов, Неперу не были известны. С помощью таблицы логарифмов, о которой говорилось выше, Непер решает свою основную задачу: строит семизначные таблицы логарифмов синусов, косинусов, тангенсов для углов от 0 до 90° с интервалом $1'$.

Еще раньше, в 1611 г., швейцарец **И. Бюрги**, часовщик и механик, ассистент астронома И. Кеплера в Праге, составил таблицы чисел вида $10^8\left(1+10^{-4}\right)^n$ с точностью до девяти знаков для n=10, 20, 30, … , 23027, над которыми работал 8 лет. Под названием «Арифметические и геометрические таблицы прогрессий» они были опубликованы лишь в 1620 г., когда

уже получили распространение логарифмы Непера и десятичные логарифмы. Английский математик **Г. Бригс**, профессор Оксфордского университета, обладавший исключительными способностями вычислителя, издал в 1617 г. 14-значные таблицы десятичных логарифмов чисел до 1000, а в 1624 г. в «Логарифмической арифметике» привел 14-значные таблицы десятичных логарифмов чисел от 1 до 20000 и от 90000 до 100000. Пробел здесь заполнил замечательный голландский вычислитель **А. Влакк (Флакк)**, издавший в 1628 г. 10-значную таблицу десятичных логарифмов чисел от 1 до 100000. В 1619 г. англичанин **Д. Спейдель** опубликовал первую таблицу натуральных логарифмов чисел от 1 до 1000. Иногда в учебниках основание e=2,71828… натурального логарифма называют числом Непера. Но у Непера не было понятия об этом числе, как и понятия об основании a логарифмов вида $\log_a b$. В общем виде показательная и логарифмическая функции были определены и детально изучены лишь в XVIII в. во «Введении в анализ бесконечных» (1748) Л. Эйлера, который ввел и обозначение e для основания натурального логарифма.

Около 1630 г. английский педагог и математик священник **У. Оутред** и лондонский преподаватель математики **Р. Деламейн** независимо друг от друга изобрели счетные логарифмические линейки. В 1630 г. Деламейн в книге «Граммеология, или математическое кольцо» описал несколько своих вариантов логарифмической линейки, состоящей из вращающегося внутри круга кольца с соответствующими шкалами. В 1632 г. в книге «Круги пропорций» У. Форстера и У. Оутреда приведено описание изобретенной Оутредом круговой логарифмической линейки, состоящей из восьми концентрических шкал для вычисления произведений и частных, а также синусов и тангенсов. В 1633 г. Форстер описал изобретенную Оутредом прямоугольную логарифмическую линейку, состоящую из двух шкал. С середины XVII в. логарифмическая линейка приобретает почти современный вид. Оутред написал учебник «Ключ математики» (1631). Об истории открытия логарифмов: [63; 62].

О возникновении математического анализа

В современных учебниках математического анализа изложение дифференциального исчисления предшествует интегральному. Но исторически сначала более полно было разработано интегральное исчисление и лишь затем – дифференциальное. Говоря об интегрировании, следует иметь в виду, что современное понятие определенного интеграла полностью сформировалось лишь в XIX в., а в XVII в. роль определенного интегрирования выполняли различные приемы вычисления площадей и объемов, координат центра тяжести криволинейных фигур, длин дуг кривых, отрезков пути с помощью представления соответствующего геометрического объекта в виде каких-либо совокупностей очень малых его частей. Неопределенное интегрирование появилось во второй половине XVII в., позже определенного.

В первой части пособия уже говорилось о том, что первые крупные успехи в интегрировании были получены Архимедом в III в. до н. э. В предварительном порядке он находил многие свои результаты с помощью изобретенного им «механического» метода, в основе которого лежала идея рассмотрения плоских фигур и тел, как бы состоящих из бесконечного числа обладающих весом параллельных сечений, и уравновешивание по правилу рычага сечений одной фигуры с помощью другой, для которой уже была известна величина площади (объема). Но при строгом изложении Архимед в ряде работ рассматривает разложение фигур на элементы, имеющие ширину или толщину, и притом взятые в конечном числе. Он использует интегральные суммы (точнее, верхние и нижние суммы) и проводит доказательства, рассуждая от противного, т. е. действует по методу, которому бельгийский математик Григорий из Сен-Винцента в XVII в. дал название «метода исчерпывания». Использование Архимедом некоторого бесконечно малого треугольника, связанного с касательной введенной им спирали, относится уже к дифференциальному исчислению. Работы Архимеда оказали на европейских математиков большое влияние уже в эпоху Возрождения

и в начале XVII в. В первые десятилетия XVII в. начинается интенсивная разработка интегрирования в геометрическом виде, без понятия интеграла: вычисление площадей и объемов криволинейных фигур, нахождение центров тяжести.

Профессор высшей школы в Риме, академик **Лука Валерио (1552–1618)** в своем труде «Три книги о центре тяжести» (1604) определяет центры тяжести многих тел вращения, полученных при вращении сегментов конических сечений, используя верхние и нижние суммы. Он формулирует общую теорему, на которую достаточно было сослаться, чтобы не проводить двойного рассуждения от противного по методу исчерпывания в каждом конкретном случае. Однако проведение строгих рассуждений в стиле работ Архимеда требовало утомительных обоснований.

Дальнейшее интенсивное развитие математического анализа в XVII в. было связано с использованием инфинитезимальных методов (т. е. методов, использующих бесконечно малые) без строгих обоснований. Это позволяло находить много новых результатов и излагать их в доступной форме. Суть метода заключалась в том, что геометрические фигуры разлагали на очень большое (или бесконечное) число бесконечно малых элементов, которые в случае необходимости заменяли более удобными. Эти элементы рассматривались либо как имеющие крайне малую ширину или толщину, либо просто как параллельные сечения фигур, которые использовал и Архимед для предварительного получения своих результатов.

Кеплер

Прекрасно владел инфинитезимальной техникой вычисления площадей и объемов знаменитый немецкий астроном и математик **Иоганн Кеплер (1571–1630)**. Он родился в небольшом городке Вейль на юго-западе Германии в семье малограмотного солдата из обедневших дворян и дочери трактирщика. Окончив семинарию и Тюбингенский университет, Кеплер работал в Австрии: 6 лет в г. Граце, в 1601–1610 гг. – в Праге в должности

астронома и математика при дворе императора, а затем в г. Линце в Австрии и ряде других городов Германии в поисках заработка в условиях Тридцатилетней войны. Поскольку жалованье не выплачивалось годами, Кеплер вынужден был зарабатывать на жизнь составлением гороскопов и календарей. С 1615 г. в течение шести лет длился судебный процесс над его матерью по обвинению в колдовстве. В эпоху Возрождения инквизиция с особенным рвением охотилась на ведьм, было сожжено несколько десятков тысяч женщин. И все же своей энергичной защитой Кеплеру удалось спасти мать от костра инквизиции.

Уже во время учебы в университете Кеплер увлекся теорией Коперника, из-за чего и был признан недостойным сана священника. В своей ранней работе «Космографическая тайна» (1597) Кеплер сделал попытку в духе пифагорейской гармонии раскрыть зависимость планетных расстояний от Солнца, помещая планетные сферы между вписанными и описанными вокруг них правильными многогранниками. Знаменитый датский астроном **Тихо Браге (1546–1601)**, работавший в то время в Праге, пригласил к себе Кеплера в качестве помощника. Их совместная работа продолжалась немногим более года до смерти Тихо Браге, после чего должность императорского астронома перешла к Кеплеру. В работе «Новая астрономия» (1609) Кеплер приводит свой первый закон движения планет. Используя данные многолетних наблюдений Тихо Браге о движении Марса, Кеплер приходит к выводу, что Марс движется не по круговой орбите, а по эллиптической, и затем убеждается в этом и для других планет. Первый закон Кеплера гласит: каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. (Кеплеру также принадлежит латинский термин «фокус», что в переводе означает «очаг», «огонь».) После установления Кеплером первого закона теория движения планет чрезвычайно упростилась: отпала необходимость введения эксцентров и многочисленных эпициклов. Кроме того, впервые эллипс получил одно из важнейших физических приложений. Второй закон, приведенный Кеплером в его книге «Краткая коперникова

астрономия» (1618–1621), утверждает: радиус-вектор планеты, соединяющий планету с Солнцем, описывает за равные промежутки времени равновеликие секторы эллипса. (Кеплер догадался о втором законе еще раньше первого, а затем проверил его эмпирически, используя числовые данные наблюдений Марса и других планет.) Вычисляя отношения площадей секторов эллипса, Кеплер делит их на большое число мелких секторов, которые затем приближенно заменяет круговыми. Третий закон Кеплера (квадраты периодов обращения планет пропорциональны кубам их средних расстояний от Солнца) приведен им в книге «Мировая гармония» (1619).

Под влиянием работ Архимеда Кеплер написал книгу «Новая стереометрия винных бочек» (1615). Имеется русский перевод 1935 г. Кроме исследования бочек, эта книга содержит «Дополнения к Архимеду» (Supplementum ad Archimedem). Здесь Кеплер первым из европейских математиков сознательно отказался от проведения строгих, но утомительных доказательств в античном духе, и это позволило ему получить большое количество новых результатов. Он пишет, что его вычисления достаточны для ума, любящего геометрию, «а полные и во всех частях строгие доказательства следует искать в самих книгах Архимеда, если кто не убоится тернистого пути их чтения». Основной прием Кеплера состоит в том, что для нахождения площади или объема данной фигуры Кеплер заменяет ее равновеликой фигурой с известной площадью или объемом, состоящей из бесконечно тонких частей, которые соответствуют бесконечно тонким частям исходной фигуры.

Например, круг радиуса R он рассматривает как состоящий из огромного числа бесконечно узких секторов, которые он приближенно считает треугольниками с высотой R. Далее он разворачивает круг, разрезанный на секторы, в пилообразную фигуру с основанием – отрезком AB длины $2\pi R$, после чего треугольники заменяет равновеликими им треугольниками с теми же основаниями на отрезке AB и вершинами в центре исходного круга. Эти новые треугольники вместе образуют треугольник

с катетами R и $2\pi R$, площадь которого равна πR^2. Аналогично он рассматривает шар «как бы» состоящим из бесконечного числа конусов, вершины которых лежат в центре шара, а основания – на его поверхности, площадь которой известна, и отсюда уже находит объем шара. Кеплер делит тор меридианными плоскостями на огромное число одинаковых «тончайших кружочков», которые затем заменяет цилиндрическими кружочками, и находит, что объем тора равен объему цилиндра, основанием которого служит круг – меридианное сечение тора, а высотой – отрезок, равный длине окружности, описанной центром сечения.

Большое число новых результатов в «Дополнении к Архимеду» Кеплер получает, рассматривая тела вращения дуг конических сечений вокруг соответствующих прямых. В зависимости от вида кривой и положения оси вращения у него получается 92 таких тела. Многим из них он дает названия: лимон, яблоко, айва, слива, яйцо, кольцо и др. Например, «лимон» получается при вращении вокруг основания сегмента круга, меньшего, чем полукруг, а «яблоко» – большего, чем полукруг.

При рассмотрении тел вращения Кеплер пользуется следующей теоремой, которую он, впрочем, явно не формулирует и не доказывает, а именно: тело, образованное вращением плоской выпуклой фигуры F вокруг оси, лежащей в той же плоскости и не пересекающей внутренности фигуры F, равновелико сегменту прямого цилиндра с основанием F, отсекаемому плоскостью, проходящей через ось вращения фигуры и наклоненной под углом $\alpha = arctg 2\pi$ к основанию. Для Кеплера интуитивная очевидность этой теоремы заключается в том, что хорда вращающейся выпуклой фигуры, параллельная оси вращения, за полный оборот опишет цилиндрическую поверхность, равновеликую прямоугольному сечению указанного цилиндрического сегмента плоскостью, перпендикулярной к основанию и проходящей через эту хорду. Тело вращения состоит из бесконечной совокупности таких цилиндрических поверхностей, а цилиндрический сегмент – из равновеликих им прямоугольных сечений, поэтому, согласно Кеплеру, объем тела вращения равен

объему цилиндрического сегмента. Объем такого «цилиндрического копыта» был известен уже Архимеду. Отметим еще, что, проектируя, например, «лимон» и равновеликое ему «цилиндрическое копыто» на плоскость, перпендикулярную оси вращения «лимона», получаем круг радиуса R и равновеликий ему треугольник с катетами R и $2\pi R$. О Кеплере: [64; 73; 61; 78; 79; 70].

— Кавальери —

Большой вклад в инфинитезимальные методы интегрирования внес итальянский математик монах-иеронимит **Бонавентура Кавальери (1598–1647)**. Он родился в Милане в знатной, хотя и потерявшей былой блеск семье. Получил хорошее гуманитарное начальное образование, а затем учился в монастыре в Пизе у математика и астронома Б. Кастелли, ученика и друга Галилея. Позже Кастелли познакомил его с Галилеем. С 1629 г. и до конца жизни Кавальери преподавал в Болонском университете. Главной из книг Кавальери является «Геометрия, изложенная новым способом неделимых непрерывного» (1635), дополненная позже «Шестью геометрическими опытами» (1647). Большое впечатление на его современников и ближайших последователей произвел изложенный там метод «неделимых». Кавальери сравнивает площади плоских фигур путем сравнения «всех линий» в них, параллельных некоторой выбранной прямой – регуле, а для сравнения объемов тел рассматривает «все плоскости» в этих телах, параллельные некоторой выбранной плоскости. Эти сечения фигур и есть «неделимые» Кавальери. Основное положение его метода: «для нахождения отношений между фигурами или телами достаточно найти отношение всех линий (в фигуре) или всех плоскостей (в телах), взятых по любой регуле». Кавальери подчеркивает общность своего метода. В «Геометрии» Кавальери доказывает и свой принцип, который входит в современные учебники и состоит в том, что фигуры равновелики, если равновелики соответствующие их сечения. Неизвестные площади (объемы) он находит, вычисляя отношения «всех неделимых» данной фигуры ко «всем неделимым» другой

фигуры, для которой площадь (объем) – известная величина. С современной точки зрения это соответствует вычислению отношений определенных интегралов, один из которых известен. Кавальери проверяет свой метод, вычисляя площадь параболического сегмента, криволинейного сектора, ограниченного спиралью Архимеда (для сектора он берет обобщение неделимых в виде дуг окружностей), а также объемы более 20 введенных Кеплером тел и убеждается, что получаются такие же результаты, как и у Кеплера. Он также производит вычисления, равносильные вычислению интеграла $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ для $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

Убедившись затем в справедливости результата еще для нескольких n, Кавальери заключает о его справедливости для всех натуральных n. Он публикует эти результаты (при $n = 1,\ 2$ они содержатся в его «Геометрии») и сообщает о них французскому математику П. Ферма. Для Ферма это не было новостью, так как он вычислил $\int_0^a x^n dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$ для всех натуральных n с помощью интегральных сумм еще в 1629 г. Этот же результат получил и французский математик Роберваль в 1634 г. Однако приоритет в его опубликовании принадлежит Кавальери. О Кавальери: [73; 78; 79; 1, т. 2].

С критикой методов Кеплера выступил шотландский геометр, ученик Виета А. Андерсон, живший в Париже, в своей книге «Защита Архимеда» (1616). Швейцарский математик монах-иезуит **П. Гульдин (1577–1643)**, преподававший математику в Риме, а затем в г. Граце (в Австрии), написал 4 книги под названием «О центре тяжести» (1635–1641). Здесь он осуждает методы Кеплера и Кавальери как нестрогие, признает их полезность для нахождения новых результатов, но не для доказательства, так как «существуют другие средства, уже испытанные геометрами», то есть доказательства по образцу Архимеда и Евклида. Во второй из своих книг Гульдин

приводит две теоремы, которые сейчас носят его имя. По-видимому, он не знал, что они имеются уже у древнегреческого математика Паппа (III в. н. э.). Доказательства Гульдина этих теорем далеки от строгости. Кавальери ответил на возражения Гульдина и привел более совершенные доказательства этих теорем по методу «неделимых». Но все же Кавальери не удалось до конца обосновать законность своего метода.

Торричелли

Существенный вклад в развитие математического анализа внес итальянский математик и физик **Эванджелиста Торричелли (1608–1647)**, родившийся в г. Фаэнце в 50 км от Болоньи. В детстве он лишился отца. Дядя, настоятель монастыря, определил Эванджелисту в иезуитскую школу (в таких школах было хорошо поставлено образование), а затем отправил на учебу в Римский университет к Б. Кастелли, с которым был знаком. Торричелли становится секретарем Кастелли, ведет в его отсутствие переписку, в частности с Галилеем. Последние три месяца жизни Галилея Торричелли был его помощником и вел запись своих бесед с ним, а после смерти Галилея в 1642 г. становится его преемником в должности «философа и первого математика» герцога тосканского, а также преподает во Флорентийском университете.

В отличие от Кавальери, Торричелли приписывает неделимым размерность той фигуры, из которых она составлена. В качестве неделимых использует также сечения фигур кривыми линиями или поверхностями. Торричелли и французский математик Роберваль (1602–1675) почти в одно и то же время, независимо друг от друга, разработали кинематический способ построения касательных к кривым, основанный на принципе сложения скоростей. Уже Галилей рассматривал движение тела, брошенного горизонтально или под углом к горизонту, как состоящее из двух перемещений: горизонтального со скоростью $v_1 = v_0$ и вертикального со скоростью $v_2 = gt$. Отсюда для тела, брошенного горизонтально, получается закон движения

$x=v_0t$, $y=\frac{gt^2}{2}$, поэтому траектория движения имеет вид параболы $y=\frac{gx^2}{2v_0^2}$ (у Галилея – в другом оформлении). В трактате «О движении естественно падающих и брошенных тел» (1644) Торричелли замечает, что касательная к траектории проходит по диагонали прямоугольника (а в более общих случаях – параллелограмма) со сторонами, равными составляющим скоростям. Отсюда следует, что $v(x)=\frac{v_2}{v_1}=tg\alpha$, где α – угол между касательной и осью Ox. График закона свободного падения тела представляет собой параболу $y=\frac{gt^2}{2}$. Она получается из приведенной выше траектории при $v_0=1$, $x=t$, поэтому параболу $y=\frac{gt^2}{2}$ можно представить как траекторию движения некоторой точки в системе tOy с горизонтальной скоростью $v_1=1$ и вертикальной $v_2=gt$, а тогда $v(t)=gt=v_2=tg\varphi$, φ – угол между касательной к графику пути $y=\frac{gt^2}{2}$ свободного падения тела и осью Ot. В сходном виде это и получил Торричелли, не имея еще понятия производной. Представление Орема и Галилея о том, что путь измеряется площадью под линией, изображающей скорость, т. е. $y=\int_0^t v(t)dt$, вместе с последним результатом Торричелли – это первый в истории математики факт установления взаимной обратимости интегрирования и дифференцирования, пока лишь на частном примере равномерно ускоренного движения.

В том же трактате Торричелли находит огибающую семейства параболических траекторий («параболу безопасности»). Это был первый в истории математики пример огибающей семейства кривых.

Торричелли принадлежит и первый в истории математики пример вычисления объема тела вращения неограниченной протяженности. Так, он вычисляет объем тела вращения неограниченной части дуги одной ветви равносторонней гиперболы вокруг ее асимптоты (эту фигуру вращения он назвал «бесконечно длинным острым гиперболическим телом»). В наших обозначениях его результат означает объем тела вращения дуги гиперболы $xy = a^2$ ($y \geq y_o > 0$) вокруг оси Oy (рис. 20). Здесь Торричелли использует в качестве неделимых цилиндрические сечения с площадью поверхности $2\pi xy = 2\pi a^2$, равной площади круга радиуса $a\sqrt{2}$, поэтому искомый объем равен

$$\int_0^{x_0} 2\pi xy dx - \pi x_0^2 y_0 = 2\pi a^2 x_0 - \pi a^2 x_0 = \pi a^2 x_0.$$

Кавальери в письме к Торричелли в 1642 г. назвал этот результат «воистину божественным». Мы можем получить искомый объем также по-иному, с помощью несобственного интеграла: $\pi \int_{y_0}^{\infty} x^2(y)dy = \pi a^4 \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{\pi a^4}{y_0} = \pi a^2 x_0$.

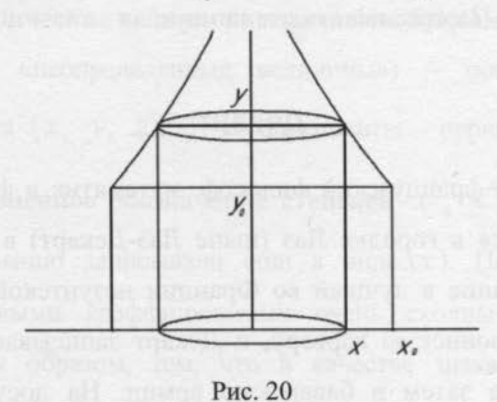


Рис. 20

В некоторых рукописях Торричелли, опубликованных лишь в 1919 г., содержится ряд квадратур и кубатур (в частности, для гипербол и парабол вида $y^n = kx^{\pm m}$, спиралей вида $\rho^n = k\varphi^m$ в полярных координатах и др.),

а также ряд спрямлений (ректификаций) дуг кривых, т. е. указаний способов вычисления дуг кривых путем построения прямолинейных отрезков, равных этим дугам (в частности, он впервые выполнил спрямление логарифмической спирали, ее тогда определяли как кривую, которая пересекает все радиус-векторы под постоянным углом). Но наиболее известен Торричелли своим открытием ртутного барометра, а также получением формулы $v = c\sqrt{2gh}$ для скорости вытекания жидкости из отверстия в сосуде, где h – расстояние от отверстия до поверхности жидкости. Таковы наиболее значительные достижения Торричелли, прожившего всего 39 лет. О Торричелли: [72; 73; 78].

Французские ученые первой половины XVII в. Декарт, Ферма, Паскаль, Роберваль и Дезарг внесли большой вклад в развитие математики. Роль «связующего центра», или «главпочтамта», в то время выполнял французский физик и математик монах-францисканец **Марен Мерсенн (1588–1648)**, который общался и вел обширную переписку со многими математиками (тогда еще не было периодических изданий). С 1625 г. У Мерсенна в монастыре в Париже собирался кружок ученых, ставший ядром созданной в 1666 г. Парижской академии наук.

Декарт

Знаменитый французский философ, математик и физик **Рене Декарт (1596–1650)** родился в городке Лаэ (ныне Лаэ-Декарт) в дворянской семье и получил образование в лучшей во Франции иезуитской школе Ла Флеш. Отец прочил ему воинскую карьеру, и Декарт записывается добровольцем в нидерландскую, а затем в баварскую армии. На досуге он занимается математикой и общается с местными учеными. После возращения во Францию с 1625 г. Декарт посещает кружок Мерсенна. В 1628 г. он уезжает в Нидерланды, где в течение 20 лет в уединении занимается философией и математикой. Церковь относилась негативно к его рационалистической философии. Чтобы избежать неприятностей, Декарт по приглашению шведской

королевы Христины в 1649 г. переезжает в Стокгольм, но не выдерживает сурового климата и в следующем году умирает от воспаления легких. С 1663 г. произведения Декарта были запрещены инквизицией.

Не имея возможности входить в детали философии Декарта, апеллирующей к разуму, к отказу от суждений, принятых на веру, отметим, что Декарт разработал новую методологию для исследования всех явлений окружающего мира, понимаемого им механистически. Основой и образцом метода он считал математику.

Главные математические идеи Декарт изложил в «Геометрии», которая является одним из приложений к его философскому труду «Рассуждение о методе» (1637). Здесь он выступил как создатель современной алгебраической символики и алгебраического метода решения геометрических задач, лежащего в основе аналитической геометрии. Во-первых, Декарт **отказался от античного принципа однородности величин**. Используя единичный отрезок, Декарт трактует произведение ab отрезков как число c такое, что $\frac{c}{b}=\frac{a}{1}$, а пропорциональные отрезки откладывает на сторонах угла. Во-вторых, он **стал обозначать геометрические величины строчными буквами**: неизвестные (по его терминологии «неопределенные величины») – последними буквами латинского алфавита $(x,\ y,\ z,...)$, коэффициенты – первыми $(a,\ b,\ c,...)$, а также **ввел современное обозначение степеней** x^3, x^4 **и т. д.** (но x^2 в XVII–XVIII вв. обычно записывали еще в виде xx). Поэтому его записи уравнений с числовыми коэффициентами очень сходны с современными, отличаясь, главным образом, тем, что в качестве знака равенства Декарт пользуется своим знаком ∞. Заметим, что обозначения неизвестных и коэффициентов строчными буквами несколько ранее использовал английский математик Гарриот (1560–1621), у которого, например, запись $aaa-3.baa+3.bba=+2.bbb$ означает уравнение $x^3-3bx^2+3b^2x=2b^3$. Гарриот в 1631 г. ввел также знаки >, <.

Много внимания в своей «Геометрии» Декарт уделяет решению так называемой задачи древнегреческого математика Паппа (III в.): на плоскости задано $2n$ или $2n-1$ $(n>2)$ прямых, пусть d_i означает расстояние от точки M к i-й из этих прямых. Требуется найти геометрическое место точек (ГМТ) таких, что $d_1 d_2 ... d_n = \lambda d_{n+1} d_{n+2} ... d_{2n}$ в случае $2n$ прямых и $d_1 d_2 ... d_n = \lambda d_{n+1} ... d_{2n-2} d_{2n-1}$ в случае $2n-1$ прямых, где $\lambda = const \neq 0$. При этом древние греки и Декарт вместо d_i брали длины отрезков, проведенных под заданным углом к прямым. Формулы расстояния от точки до прямой они не знали. Однако уже Аполлонию (III в. до н. э.) – или еще до него – было известно, что в случае трех или четырех прямых искомые ГМТ представляют собой конические сечения. Папп приводит формулировку этой задачи и говорит, что древние греки даже в случаях трех или четырех прямых не знали о том, какого вида при этом получаются конические сечения, а тем более, каковы будут ГМТ в случае большего числа прямых. Демонстрируя силу своего алгебраического подхода, Декарт получает в случае трех или четырех прямых искомое ГМТ в виде $y = m - \frac{n}{z}x + \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$, где m, n, o, p, z – действительные постоянные. Он отмечает, что при отсутствии радикала получается уравнение прямой. После замены $y_1 = y - (m - \frac{n}{z}x)$ он анализирует, в каких случаях кривая $y_1 = \sqrt{mm + ox - \frac{p}{m}xx}$ представляет собой параболу, гиперболу или эллипс, в частности окружность. Он обсуждает и вопрос о ГМТ в случае большего числа прямых. Заметим, что в общем случае решение задачи Паппа есть алгебраическая кривая порядка n. Декарт также приводит сведения о некоторых преобразованиях алгебраических уравнений и рассматривает вопрос о геометрическом построении их корней.

Все кривые Декарт разбивает на геометрические и механические, позже Лейбниц назвал их, соответственно, алгебраическими и трансцендентными. Кривые порядков $2n-1$ и $2n$ Декарт объединяет в один «род». Трансцендентные кривые (например, квадратрису, спираль Архимеда) Декарт исключает из геометрии, т. к. не может применить к ним свой алгебраический метод. Заметим, что и современная аналитическая геометрия ограничивается рассмотрением кривых и поверхностей, заданных алгебраическими уравнениями. Основной метод Декарта заключается в сведении геометрических задач к алгебраическим уравнениям и построению или нахождению их корней: «истинных» (положительных), «ложных» (отрицательных) и «воображаемых», или «мнимых», (комплексных). Декарт формулирует основную теорему алгебры в виде: «Всякое (алгебраическое) уравнение может иметь столько различных корней, или же значений неизвестной величины, сколько последняя имеет измерений», т. е. каков порядок уравнения. Ранее, в 1629 г., её высказал А. Жирар – протестант, бежавший от преследования из Франции в Голландию. А еще в 1608 г. немецкий математик П. Роте утверждал, что алгебраическое уравнение n-й степени может иметь до n корней. Декарт уже записывает уравнения с правой частью, равной нулю. Он приводит также «правило знаков» для определения числа положительных и отрицательных корней алгебраического уравнения по знакам его коэффициентов. Декарт строит корни уравнений степени $n>3$ путем пересечения двух кривых порядка ниже n (О. Хайям систематически проделал это для случая $n=3$). В «Геометрии» Декарт предложил также алгебраический способ построения нормали к алгебраическим кривым, используя тот факт, что соседние точки пересечения данной кривой и окружности сливаются в одну в случае касания кривой и окружности. При этом он использует понятие кратного корня и **впервые применяет метод неопределенных коэффициентов**. К построению нормалей Декарта привели его исследования вопроса о форме линз, обладающих заданными свойствами преломления и отражения. В «Геометрии» он уделяет много внимания построению нормалей к введенным им овалам в оптике.

«Геометрия» Декарта пользовалась большой популярностью. Однако многие вопросы там были изложены очень сжато, для их понимания нужны были комментарии. Ученик и друг Декарта голландский математик Франц ван Схоутен (1615–1660) в 1646 г. издал латинский перевод «Геометрии» Декарта, добавив свои комментарии, а также работы математиков Гудде, де Бона, де Витта и др., дополняющие исследования Декарта. Так, голландский математик И. Гудде (1628–1704), бургомистр Амстердама, вводит формально, не пользуясь дифференцированием, производную многочлена и для нахождения двукратных корней уравнения $f(x)=0$ использует общий делитель уравнений $f(x)=0$ и $f'(x)=0$. Заменяя в методе нормалей Декарта окружность прямой, Гудде получает для кривой $F(x,y)=0$, где $F(x,y)$ – многочлен, выражение углового коэффициента касательной, которое мы записываем в виде: $-\frac{F'_x}{F'_y}$. Этот же результат примерно в то же время получил и бельгийский математик-любитель, священник Р. Ф. де Слюз. Работа голландского государственного деятеля и математика Я. де Витта «Начала кривых линий», добавленная Схоутеном к «Геометрии» Декарта, является одним из первых курсов аналитической геометрии на плоскости. Из переписки Декарта известно, что он умел вычислять площади сегментов парабол, циклоиды, объемы и центры тяжести параболоидов вращения. На русском языке «Геометрия» Декарта издана в 1938 г. в переводе с подробными пояснениями и статьей А. П. Юшкевича. При этом добавлены работы П. Ферма «Введение в изучение плоских и телесных мест» и «Метод отыскания наибольших и наименьших значений», а также ряд писем Декарта к Ферма. О Декарте: [66; 67; 72; 74; 61; 1, т. 2].

Ферма

Великий французский математик **Пьер Ферма (1601–1665)** родился в семье торговца кожевенными товарами в городке Бомон-де-Ломань недалеко от Тулузы. Он окончил юридический факультет Тулузского университета,

работал сначала адвокатом, а затем советником окружного суда (парламента) в Тулузе. Он был самым знаменитым математиком первой половины XVII в., хотя занимался математикой на досуге. При жизни Ферма опубликовал лишь одну работу, но его достижения были хорошо известны математикам из обширной переписки, которую он вел в основном через Мерсенна.

Ферма является одним из главных создателей основ теории чисел и наиболее известен своими достижениями в этой области (см. [68], а также [2, ч. II; 72; 61; 1, т. 2; 39]). Почти все свои теоретико-числовые результаты Ферма сформулировал без доказательства в письмах и в виде замечаний на полях своего экземпляра «Арифметики» Диофанта, изданной в 1621 г. (древнегреческий математик Диофант жил примерно в III в.). Эти замечания, а также письма и рукописи были изданы после смерти Ферма его сыном в 1679 г. Основные вопросы, которые рассматривал Ферма в теории чисел, следующие:

1) о виде простых чисел, представимых квадратичными формами x^2+y^2, $x^2 \pm 2y^2$, x^2+3y^2, x^2+5y^2, x^2+xy+y^2 (оказалось, что такие простые числа, кроме представимых в виде x^2+5y^2, лежат в соответствующих арифметических прогрессиях);

2) о решении в целых числах «уравнения Пелля» $ax^2+1=y^2$, где $a \in \mathbb{Z}$ и не является квадратом (об истории этого уравнения см. далее в конце очерка о Лагранже);

3) «Великая (или Последняя) теорема Ферма»: уравнение $x^n+y^n=z^n$ при натуральных $n \geq 3$ и $xyz \neq 0$ не имеет решений в целых числах;

4) «малая теорема Ферма»: если число a не делится на простое число p, то $a^{p-1}-1$ делится на *p*; вообще, существует *m* такое, что a^m-1 делится на *p*, а *m* делится на $p-1$;

5) открытие методов нахождения бесконечного множества решений диофантовых уравнений и систем.

Теоретико-числовые утверждения Ферма, за исключением его Великой теоремы, были в XVIII–XIX вв. доказаны рядом крупных математиков, в особенности Эйлером. В замечании на полях экземпляра «Арифметики» Диофанта Ферма формулирует свою Великую теорему и утверждает, что нашел удивительное ее доказательство, но оно не умещается на узких полях. В бумагах Ферма содержалось ее доказательство лишь для случая $n = 4$ с помощью изобретенного им метода спуска. Позже Великую теорему Ферма доказали: Эйлер для $n = 3$ в 1768 г., Дирихле и Лежандр для $n = 5$ в 1825 г., Ламе для $n = 7$ в 1839 г. При некоторых ограничениях на x, y, z теорему Ферма доказала для некоторого класса простых показателей $n < 100$ француженка **Софи Жермен (1776–1831)** – первая знаменитая женщина-математик Нового времени. Свой результат она сообщила Лежандру, которой расширил его на простые $n < 197$ при ограничениях на x, y, z. Немецкий математик **Эрнст Эдуард Куммер (1810–1893)** в 1858 г. доказал Великую теорему Ферма для всех простых $n < 100$ и был награжден премией Французской академии наук. Большой заслугой Куммера было расширение поля алгебраических чисел введением так называемых «идеальных чисел» (дивизоров) с целью восстановления единственности разложения чисел вида $a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + ... + a_{\lambda-1}\alpha^{\lambda-1}$ ($a_i \in \mathbb{Z}$, $\alpha^\lambda = 1$) на множители, что позволило глубоко продвинуться в доказательстве теоремы Ферма. Вместо «идеальных чисел» немецкий математик **Рихард Дедекинд** в конце XIX в. ввел некоторые подмножества колец алгебраических чисел, а именно идеалы. Огромное значение Великой теоремы Ферма заключается в том, что попытки ее доказать привели к созданию алгебраической теории чисел и других современных разделов алгебры.

В 1908 г. немецкий любитель математики Вольфскель завещал 100 тыс. марок тому, кто докажет Великую теорему Ферма. Это вызвало

буквально лавину ее доказательств, оказавшихся ошибочными. В период инфляции в первую мировую войну премия обесценилась. В последние десятилетия с помощью ЭВМ теорема Ферма была проверена для n до $4 \cdot 10^6$. В 1993 г. как о сенсации века пресса сообщила о том, что теорему Ферма уже окончательно доказал английский математик **Эндрю Уайлс**, работая в Принстонском университете в США. В 50-х гг. XX в. молодые японские математики Танияма и Шимура на основании некоторых примеров выдвинули трудную гипотезу о том, что каждой эллиптической кривой определенного класса соответствует некоторая модулярная форма. В 1985–1986 гг. Фрей высказал, а Рибет доказал, что Великая теорема Ферма следует из гипотезы Таниямы–Шимуры. Уайлс доказал гипотезу Таниямы–Шимуры, трудясь над доказательством в течение 8 лет, причем первые 7 лет он работал над ним в полной тайне от других математиков. Экспертная комиссия указала Уайлсу на пробел в доказательстве. После доработки и проверки доказательство Уайлса было опубликовано в журнале: Annals of Mathematics. – 1995. – Vol. 142. – P. 443–572. Подробно история доказательств Великой теоремы Ферма для частных случаев изложена в книгах: Эдвардс Г. Последняя теорема Ферма (Генетическое введение в алгебраическую теорию чисел). – М.: Мир, 1980. – 484 с.; Постников М. М. Теорема Ферма (Введение в теорию алгебраических чисел). – М.: Наука, 1979. – 128 с.; Постников М. М. Введение в теорию алгебраических чисел. – М.: Наука, 1982. – 240 с. История доказательств Великой теоремы Ферма и трудный процесс ее доказательства Э. Уайлсом увлекательно описаны в научно-популярной книге: Сингх С. Великая теорема Ферма (История загадки, которая занимала лучшие умы мира на протяжении 358 лет). – М.: Изд-во МЦНМО, 2000. – 288 с.

Наряду с Декартом Ферма является создателем основ аналитической геометрии. В работе «Введение в плоские и телесные места», известной французским математикам в рукописи с 1636 г., но опубликованной лишь в 1679 г., Ферма более полно и систематичнее, чем Декарт, излагает основы аналитической геометрии на плоскости. Но при этом Ферма пользуется мало

удобной символикой и алгеброй Виета, сохранившей присущие геометрической алгебре соблюдение однородности величин и геометрический стиль рассуждений. Ферма пришел к этому вопросу, занимаясь восстановлением сочинения Аполлония «О плоских местах», частично сохранившегося благодаря Паппу. (Следуя античной традиции, в начале XVII в. плоскими местами называли прямую и окружность, а телесными – эллипс, параболу и гиперболу как сечения конуса плоскостями.)

Ферма рассматривает на горизонтальной прямой с началом N положительные абсциссы A в виде отрезков, а перпендикулярно к ним – обычно положительные ординаты E, хотя при изображении гиперболы $x^2 + B^2 = \lambda y^2,\ \lambda > 0$ (в его записи: $Aq. + Bq.$ находится в данном отношении к $Eq.$) он рисует обе ее ветви. Ферма показывает, что уравнениями 1-го и 2-го порядков выражаются свойства соответствующих геометрических объектов: прямых ($Dx = By$, в его записи: $D\ in\ A\ aequatur\ B\ in\ E$; $C - Dx = By$, в его записи: $Z\ pl. - D\ in\ A\ aquatur\ B\ in\ E$); конических сечений: гипербол ($xy = C$, $x^2 + B^2 = \lambda y^2$, $\lambda > 0$), парабол ($x^2 = Dy$, $y^2 = Dx$), окружности ($B^2 - x^2 = y^2$), эллипса ($B^2 - x^2 = \lambda y^2, \lambda > 0$). В более сложных примерах (гиперболы $D + xy = Rx + Sy$, окружности $B^2 - 2Dx - x^2 = y^2 + 2Ry$) он преобразует уравнения и сводит их к каноническому виду по существу путем переноса системы координат, а в случае эллипса $B^2 - 2x^2 = 2xy + y^2$ – путем поворота, хотя он просто заменяет переменные, не говоря о переносе и повороте. В начале работы Ферма утверждает по поводу вида уравнений: «Если при этом ни одна из неизвестных величин не будет превосходить квадрата, то, как это станет ясно из дальнейшего, место будет плоским или телесным». Это означает, что если порядок уравнения не превосходит двух, то уравнение определяет либо прямую или окружность, либо эллипс, параболу или гиперболу. В дополнении Ферма строит корни уравнений 3-й и 4-й степеней с помощью

пересечения двух конических сечений. Работа Ферма «Введение в плоские и телесные места» оказала на современников намного меньшее влияние, чем «Геометрия» Декарта. Причинами этого были слишком позднее опубликование работы Ферма и использование им мало удобной символики Виета по сравнению с введенной Декартом.

У Декарта и Ферма отсутствовала аналитическая геометрия в пространстве. Впрочем, Ферма в одной работе заметил, что уравнение с тремя переменными выражает поверхность, но эта мысль не получила у него развития. Координатная система у Декарта и Ферма была еще несовершенной, ее понимание было близким к античному. Отрицательные абсциссы, а обычно и отрицательные ординаты, не учитывались, вторая координатная ось часто не изображалась или рассматривалась просто как «первая ордината». Числовые координаты точек отсутствовали. Постепенно эти недостатки устранялись.

В «Трактате о конических сечениях» (1656) английский математик Дж. Валлис ввел отрицательные абсциссы. Ньютон в «Перечислении кривых 3-го порядка» полностью рисует обе координатные оси, правильно учитывает знаки координат в различных квадрантах. Его рисунки кривых имеют современный вид. Как и в настоящее время, используют координатные оси и координаты точек на плоскости французский математик, монах К. Рабюэль в «Комментариях к геометрии господина Декарта» (1730) и швейцарский математик Г. Крамер, ученик и друг Иоганна Бернулли, во «Введении в анализ алгебраических кривых» (1750). У Л. Эйлера во втором томе «Введения в анализ бесконечных» (1748) уже есть формулы поворота осей координат на угол φ, а именно $t = x\cos\varphi - y\sin\varphi$, $u = x\sin\varphi + y\cos\varphi$. Введение третьей координатной оси и первые начатки аналитической геометрии в пространстве имеются у французского математика и астронома А. К. Клеро (1731), а первое систематическое изложение поверхностей 2-го порядка – у Л. Эйлера в «Приложении о поверхностях» ко II тому «Введения в анализ бесконечных». Таким образом, в течение примерно 100 лет, начиная

с Декарта и Ферма, аналитическая геометрия приняла вид, в основном сходный с современным. Заметим, что современный американский математик и историк математики Дж. Кулидж (1873–1954) считает подлинными творцами аналитической геометрии на плоскости древних греков, которые открыли конические сечения, получили их уравнения («симптомы») и глубоко изучили эти кривые. Заслуга Декарта и его последователей – в арифметизации геометрии, отказе от однородности, в классификации уравнений, введении современных систем координат, построении общей теории кривых и поверхностей.

Ферма является главным предшественником Ньютона и Лейбница в создании дифференциального исчисления. Около 1629 г. он изобрел дифференциальный метод отыскания экстремума функции. В 1636 г. он сообщил об этом Робервалю, в 1638 г. – Декарту, а всеобщую известность метод Ферма получил после того, как французский математик П. Эригон, автор 6-томного курса математики, включил этот метод в свои «Дополнения к курсу математики» (1642). Работа Ферма «Метод отыскания наибольших и наименьших значений» написана около 1637 г. и опубликована в 1679 г. после его смерти.

Ферма ищет необходимое условие экстремума следующим образом. Пусть $P(A)$ – экстремальное значение многочлена. (Общего обозначения для многочлена, как и вообще для функции, в то время еще не было, Ферма имеет дело с конкретными многочленами.) При весьма малых, но конечных E Ферма рассматривает приближенное равенство $P(A+E)=P(A)$. Он разлагает левую часть по степеням E и затем отбрасывает в обеих частях равные члены $P(A)$. Таким образом, получается уравнение вида $Q(A)E + R(A)E^2 + ... = 0$, левая часть которого содержит множитель E. Разделив (сократив) уравнение на E и затем положив $E=0$ в оставшихся членах, Ферма получает в результате необходимое условие экстремума: $Q(A) = 0$. Понятий предела и производной в то время еще не было, но Ферма фактически получает необходимое условие $f'(x_0) = 0$ экстремума функции $f(x)$ (для

многочлена) в точке x_0 по правилу $\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0$. Поэтому теорема о необходимом условии экстремума в современных курсах математического анализа носит имя Ферма. Заметим, что понятие производной получило законное обоснование лишь в XIX веке после создания теории пределов. До Ферма, в 1615 г., И. Кеплер в «Стереометрии винных бочек» высказал замечание о том, что вблизи максимума изменение величины становится незаметным (это соответствует «приравниванию» $P(A+E)-P(A)=0$ Ферма или нашему $dy=0$). Но он не попытался использовать свое замечание для получения правила исследования величины на экстремум. Это впервые и независимо ни от кого сделал Ферма. В упомянутой работе Ферма дает также пример применения своего метода «приравнивания» к нахождению подкасательной к параболе, что дает возможность строить касательную к параболе. Декарт ошибочно рассмотрел отыскание отрезка касательной к параболе из точки ее оси как задачу на максимум и пришел к абсурду в результате незаконного применения метода Ферма. Поэтому он вначале не признавал универсальности метода Ферма и резко полемизировал с Ферма в письмах, посылаемых через Мерсенна. Но позже он понял свою ошибку и даже попытался получше объяснить метод Ферма.

В одном из писем 1643 г., опубликованном лишь в 1922 г., Ферма представляет в точке x_0 экстремума разность $f(x_0 \pm h)-f(x_0)$ по степеням h (для многочлена и в других обозначениях) и указывает, что коэффициент при h необходимо должен быть равен нулю и что вид экстремума (максимум или минимум) определяется знаком коэффициента при h^2. Таким образом, Ферма имел представление и о достаточных условиях экстремума. Кроме того, он умел находить и точки перегиба, выясняя, где наклон касательной имеет экстремумы, что равносильно исследованию точек перегиба с помощью второй производной. Через несколько лет после смерти Ферма Ньютон ввел производные и применил их к исследованию экстремумов и точек перегиба под влиянием способа Ферма нахождения касательных. Ферма находит

подкасательную также для кривой, заданной уравнением $F(x,y)=0$, а именно для декартова листа $x^3+y^3=axy$, выполняя действия, аналогичные составлению уравнения $\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}y'_x=0$ (здесь $y'_x=\frac{y}{t}$, где y – ордината точки касания, а t – подкасательная).

Важным результатом Ферма является его доказательство закона преломления света при прохождении двух сред, а именно $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{v_1}{v_2}$, полученного экспериментально голландским астрономом, геодезистом и математиком Снеллиусом (Снеллем) и Декартом. При этом Ферма использует свой **вариационный принцип**, согласно которому свет распространяется по пути, требующему минимального времени для его прохождения.

После Архимеда Ферма одним из первых существенно продвинулся в методах вычисления квадратур, т. е. площадей криволинейных фигур, внеся, таким образом, существенный вклад в развитие интегрального исчисления. Уже около 1629 г. Ферма вычислил интеграл (всюду здесь под интегралами понимается площадь соответствующей криволинейной фигуры) $\int_0^x x^m dx=\frac{x^{m+1}}{m+1}$ для любого натурального *m* по методу Архимеда с помощью интегральной суммы $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{kx}{n}\right)^m\cdot\frac{x}{n}=\frac{x^{m+1}}{n^{m+1}}\sum_{k=1}^{n}k^m$, где приходилось оценивать суммы вида $1^m+2^m+\ldots+n^m$. Аналогичные вычисления несколько позже проделал Роберваль. Однако для дробных степеней этот метод не годился. Ферма удачно обошел эту трудность, разбивая промежуток интегрирования на части, образующие геометрическую прогрессию. Свой метод вычисления интегралов от степенной функции («квадратур парабол и гипербол») Ферма изложил в работе «О преобразовании уравнений мест…», окончательно оформленной

около 1657 г. и опубликованной в 1679 г. Изложим метод Ферма, используя современные обозначения. Для вычисления интеграла $\int_0^x x^\alpha dx$, где $\alpha = \frac{m}{n} > 0$, Ферма в качестве точек разбиения берет убывающую геометрическую прогрессию вида $x,\ xq, ...,\ xq^k, ...,$ где $0 < q < 1$. Тогда ординаты в точках разбиения будут $x^\alpha,\ (xq)^\alpha, ...,\ (xq^k)^\alpha, ...,$ а суммарная площадь полосок, на которые разобьется фигура, приближенно выражается в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}(xq^k)^\alpha \cdot x(q^k - q^{k+1}) = (1-q)x^{\alpha+1}\sum_{k=0}^{\infty} q^{k(\alpha+1)} = \frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}}x^{\alpha+1}.$$

Переходя к пределу при $q \to 1$, получаем $\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$.

При вычислении интеграла $\int_x^\infty x^{-\alpha} dx$, где $\alpha = \frac{m}{n} > 1$, Ферма берет геометрическую прогрессию со знаменателем $q > 1$. Впрочем, он проводит рассуждения только для некоторых α (см. [3, с. 57–61]), но его рассуждения носят общий характер.

Ферма упоминает и случай гиперболы $y = \frac{1}{x}$, отмечая, что если точки разбиения на оси абсцисс образуют геометрическую прогрессию, то при этом фигура между гиперболой $y = \frac{1}{x}$ и ее асимптотой разбивается отвечающими им ординатами на равновеликие полоски. Это означает, что геометрической прогрессии абсцисс здесь отвечает арифметическая прогрессия сумм площадей равновеликих полосок разбиения, поэтому площадь между гиперболой $y = \frac{1}{x}$ и отрезком $[1;\ x]$ оси абсцисс равна логарифму, т. е. $\int_1^x \frac{dx}{x} = \ln x$. Отметим, что в XVII веке функция $\ln x$ введена еще не была,

а ее роль выполняла переменная площадь криволинейной трапеции между гиперболой $y=\frac{1}{x}$ и отрезком оси Ox.

Кроме интегрирования степенной функции, Ферма находит некоторые интегралы вида $\int_0^a (a^2-x^2)^{m+\frac{1}{2}}dx$, а также площадь неограниченной фигуры между осью Ox и кривой $y=\frac{a^3}{x^2+a^2}$, названной позже «локоном Аньези» в честь итальянской женщины-математика **Марии Гаэтаны Аньези (1718–1799)**, преподававшей математику в Болонском университете и написавшей книгу «Основания анализа» (1748). Ферма искусно пользуется аналогом замены переменных и неким аналогом интегрирования по частям в форме равенства площадей, который в современных обозначениях можно записать в виде $\int_0^a y^n dx = n\int_0^b xy^{n-1}dy$, где монотонная кривая $y=f(x)$ соединяет точки $(a, 0)$ и $(0, b)$. Занимался он и вычислением длин дуг кривых. О Ферма: [72–74; 66; 70; 61; 1, т. 2; 68; 39; 40].

Григорий из Сен-Винцента

Заметную роль в предыстории математического анализа сыграл известный бельгийский математик иезуит **Григорий из Сен-Винцента (1584–1667)**. Он учился в Риме у Х. Клавия (1537–1612), преподавал в университетах Бельгии и в Пражском университете. Свой «Геометрический труд о квадратуре круга и конических сечений» Григорий написал около 1629 г. и опубликовал в 1647 г. Здесь он вычисляет площади некоторых фигур и объемы тел, вписывая в них, соответственно, прямоугольники или параллелепипеды так, чтобы они «исчерпывали» криволинейные фигуры и тела. Ему же принадлежит термин «метод исчерпывания» для соответствующего античного метода доказательства с использованием вписанных или

описанных фигур и двойным приведением к абсурду. В частности, он вычисляет объемы, соответствующие интегралам вида $\int_a^b yzdx$, некоторых тел, ограниченных координатными плоскостями, цилиндрическими поверхностями $y = f(x)$ и $z = \varphi(x)$ и плоскостями $x = a$ и $x = b$. Он первым обратил внимание на указанное выше свойство площади под гиперболой, связанное с логарифмами. Он же первым в общем виде находит сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, рассматривая члены геометрической прогрессии в виде отрезков, а также впервые применяет ряд из членов убывающей геометрической прогрессии к объяснению парадокса об Ахиллесе и черепахе. А его ученик, бельгийский иезуит Андре Таке (1612–1660), в своей «Теории и практике арифметики» (1656) вывел сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии уже чисто арифметически. Он применяет метод исчерпывания к кубатуре различных цилиндрических отрезков и кольцевидных тел. Его описание «исчерпывания величин» весьма близко позднейшим определениям предела. О Григории из Сен-Винцента: [69, с. 113–114; 61, с. 255–256].

Паскаль

Замечательный французский математик, физик и философ **Блез Паскаль (1623–1662)** родился в г. Клермон-Ферране, в дворянской семье. Отец Блеза, Этьен Паскаль, окончил юридический факультет Парижского университета, хорошо знал языки и математику, которой занимался на досуге (его имя носит одна из кривых – «улитка Паскаля»). Он был единственным учителем Блеза и лично дал ему прекрасное образование. Блез очень рано проявил свои выдающиеся способности. После переезда в Париж Этьен Паскаль вместе с 14-летним Блезом посещает кружок Мерсенна. В 16 лет Блез открыл названную его именем теорему из проективной геометрии о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, а в 19 лет сконструировал арифметическую счетную машину, выполнявшую сложение и вычитание.

Это был первый образец успешно действующей счетной машины. По заказу Паскаля было изготовлено несколько десятков ее экземпляров, из них 7 сохранилось к настоящему времени. В честь Паскаля в наше время назван один из основных языков программирования.

В истории развития интегрального исчисления Блезу Паскалю принадлежит особая роль как по личному вкладу, так и по тому влиянию, которое оказали его работы на Лейбница. Основные результаты Паскаля по интегрированию опубликованы им в сборнике «Письма А. Деттонвилля (это один из псевдонимов Паскаля) о некоторых его геометрических открытиях» (1659). Они касаются в основном вычисления площадей, объемов, длин дуг и центров тяжести. Паскаль использует термины «сумма линий» или «сумма ординат», но они всегда у него являются аналогами интегральных сумм.

В «Трактате о синусах четверти круга», вошедшем в указанный сборник, Паскаль для вычисления «суммы синусов», т. е. интеграла от синуса, использует бесконечно малый треугольник *EKE* (рис. 21, на котором сохранены обозначения Паскаля).

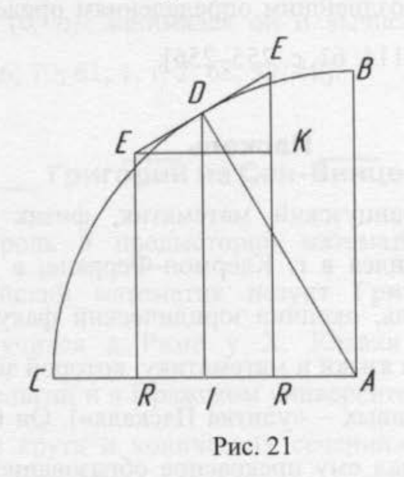


Рис. 21

Из подобия треугольников *EKE* и *DIA* следует, что $\frac{DI}{AD}=\frac{EK}{EE}=\frac{RR}{EE}$, откуда $DI\cdot EE = AD\cdot RR$. Суммируя, Паскаль получает равенство вида $\sum DI\cdot EE = AD\sum RR$, левая часть которого является аналогом нашего

$r^2\int\limits_0^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi$, где r – радиус круга. Действительно, в наших обозначениях, введенных Лейбницем, равенство $DI\cdot EE = AD\cdot RR$ можно записать в виде $yds = -rdx$ (ось Ox здесь направлена влево, x и y считаем функциями от s=CD), откуда $\int\limits_0^{s} yds = -r\int\limits_0^{s} dx = r\cdot(x(0)-x(s))$. Положим $\angle CAD = \varphi$, тогда $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $ds = rd\varphi$ и при $r = 1$, в частности, имеем $\int\limits_0^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi = 1-\cos\varphi$. Меняя роли осей координат, Паскаль получает и равенство, аналогичное нашему $\int\limits_0^{\varphi}\cos\varphi\,d\varphi = \sin\varphi$. Интеграл $\int\limits_0^{\varphi}\sin\varphi\,d\varphi$ в виде соответствующей площади был известен по существу уже Архимеду, Кеплеру и Гульдину, но «Трактат о синусах четверти круга» Паскаля сыграл большую роль в истории интегрального исчисления. Лейбниц, познакомившись после смерти Паскаля с его бумагами и стремясь к обобщениям, сразу заметил, что прием Паскаля применим к кривым вообще, а не только к окружности, а также пригоден для вычисления площадей поверхностей вращения. Бесконечно малый треугольник *EKE* Паскаля послужил прообразом для «характеристического треугольника» Лейбница с катетами dx, dy и гипотенузой ds.

Для преобразования и вычисления интегралов Паскаль очень искусно использует аналоги интегрирования по частям с равным нулю внеинтегральным членом. Например, равенство, которое мы можем записать в виде

$$\int\limits_0^{b} xzdy = \int\limits_0^{a}\Big(\int\limits_0^{y} zdy\Big)dx, \text{ или короче } \int\limits_0^{b} xdv = \int\limits_0^{a} vdx,$$

он получает, вычисляя двумя способами объем тела, ограниченного координатными плоскостями и цилиндрическими поверхностями вида $y = f(x)$, $z = g(y)$ (рис. 22).

Используя это равенство и его следствия, а также другие формулы подобного типа, Паскаль вычисляет (в геометрическом виде) целый ряд новых интегралов: $\int_0^\alpha \varphi^n \cos(\alpha-\varphi)d\varphi$ (при $n=1,\ 2$), $\int_0^\alpha \varphi\cos^2(\alpha-\varphi)d\varphi$, $\int_0^a (\arccos x)^n dx$ (при $n=1,\ 2,\ 3$), $\int_0^a x(\arccos x)^n dx$ (при $n=1,\ 2$) и др., а также интегралы вида $\int_0^a (a^2-x^2)^{\frac{1}{2}} x^n dx$ (при $n=2,\ 3$), $\int_x^a (a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} dx$.

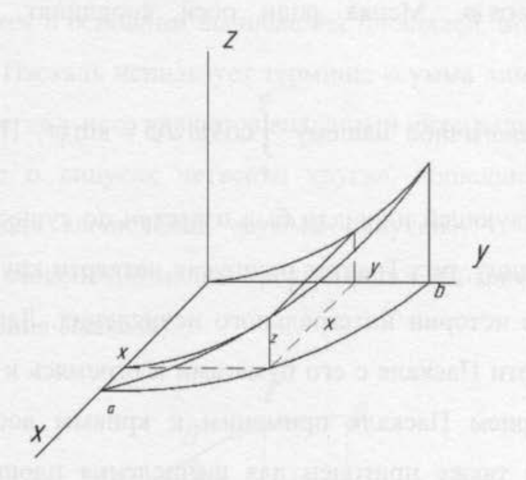


Рис. 22

Кроме вклада в теорию интегрирования, Паскалю принадлежат и другие достижения в математике. До Паскаля был известен числовой треугольник из биномиальных коэффициентов (арабским ученым в X–XI веках, а также некоторым европейским, начиная с XVI века). Паскаль рассматривает биномиальные коэффициенты **как сочетания в комбинаторике**, а для доказательства их аддитивного свойства впервые применяет метод математической индукции. В честь Паскаля этот числовой треугольник был назван его именем. Заметим, что сочетания были известны индусам еще во II веке до нашей эры. В теории вероятностей Паскаль и Ферма получили первые результаты при решении задачи о разделе ставки между игроками,

когда игра прервана до ее естественного окончания. Всеобщую известность получили достижения Паскаля в физике (барометрическая формула, закон Паскаля в гидростатике). В 1654 г. Паскаль испытывает глубокий нравственный переворот и с 1655 г. ведет полумонашеский образ жизни в янсенистском монастыре Пор Рояль в 25 км от Парижа, оставив занятия наукой. Все же в 1658 г. он написал замечательную работу о циклоиде. Живя в монастыре, он выступал с резкой критикой иезуитов в блестяще написанном сочинении «Письма к провинциалу». Свои философские размышления о хрупкости и величии человеческого существования в космическом плане и о религии Паскаль необычайно ярко выразил в неоконченном сочинении, получившем впоследствии название «Мысли». Он прожил всего 39 лет. О Паскале: [75; 76; 73; 74; 61; 71; 1, т. 2; 18].

Роберваль

Французский математик **Роберваль** (вошедший под такой фамилией в науку **Жиль Персонн**, в некоторых документах **Персонье, 1602–1675**) родился в крестьянской семье. Он какое-то время учился в коллеже, математику осваивал самостоятельно и вначале зарабатывал на жизнь частными уроками. Переехав в Париж, сблизился с Мерсенном и Паскалем и стал очень активно заниматься математикой. Вскоре он уже преподает в коллеже Жерве, а с 1634 г., кроме того, занимает и очень престижную кафедру математики в Коллеж де Франс – одном из крупнейших вузов Парижа. Его лекции пользовались огромной популярностью. Он присваивает себе вторую фамилию де Роберваль, где частица «де» указывает на его якобы дворянское происхождение.

Примерно на год позже, чем Кавальери, Роберваль разработал метод «неделимых», при этом приписывал неделимому ту же размерность, что и у фигуры. Этим способом он вычислил ряд квадратур и кубатур, в частности объемы тел вращения арки циклоиды вокруг основания, вокруг касательной к вершине, вокруг оси симметрии.

Независимо от Торричелли Роберваль систематически разработал кинематический способ построения касательных к кривым, основанный на сложении скоростей по правилу параллелограмма. Этим способом Роберваль построил касательные ко многим кривым (циклоиде, коническим сечениям, спирали Архимеда, квадратрисе, конхоиде и др.).

Самой популярной кривой в XVII веке была циклоида, то есть кривая, которую описывает фиксированная точка окружности, когда окружность катится по прямой. О ней упоминает в начале XVIII века даже Дж. Свифт в «Путешествиях Гулливера»: «На второе был подан пирог в форме циклоиды». Название «циклоида» предложил Галилей, открывший эту кривую. Роберваль строил касательную к циклоиде путем сложения двух составляющих скорости движущейся точки: вдоль основания циклоиды и вдоль касательной к движущейся окружности. Для циклоиды эти составляющие равны по величине, т. к. длина основания циклоиды равна длине катящейся окружности.

Роберваль в 1638 г. первым нашел, что площадь фигуры между аркой циклоиды и ее основанием равна утроенной площади катящегося круга. Позже это нашли другим способом Декарт и Ферма. Интересно, что при вычислении Робервалем этой площади впервые появляется график части синусоиды, это первый в истории математики пример графика тригонометрической функции (рис. 23, где указаны катящаяся окружность, половина арки циклоиды и часть синусоиды). Роберваль назвал синусоиду «спутницей» циклоиды и рассуждал примерно следующим образом.

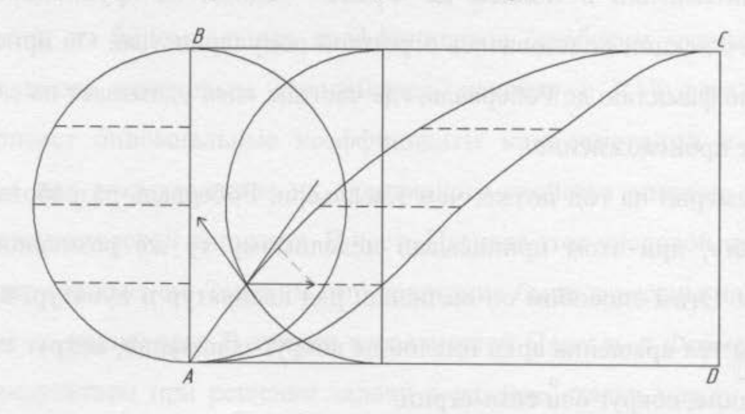


Рис. 23

Пусть R – радиус катящегося круга, тогда, очевидно, прямоугольник $ABCD$ имеет площадь $2\pi R^2$. В силу симметрии синусоида делит его на две равные части площади πR^2. Площадь лепестка между циклоидой и синусоидой по принципу Кавальери–Роберваля равна площади полукруга, т. е. $\frac{\pi R^2}{2}$. Таким образом, площадь под половиной арки циклоиды равна $\pi R^2 + \frac{\pi R^2}{2} = \frac{3}{2}\pi R^2$, а искомая площадь равна $3\pi R^2$. С помощью указанного рисунка Роберваль также без труда находил объемы тел вращения циклоиды вокруг прямой *CD*, а также вокруг прямых *AD* и *BC*. Независимо от него эти объемы нашел и Торричелли, а затем Паскаль нашел объемы тел вращения сегментов циклоиды и их центры тяжести. Отметим еще, что при вычислении квадратуры конхоиды Роберваль нашел интеграл $\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2\varphi} = \operatorname{tg}\varphi$ (разумеется, в других обозначениях).

Роберваль очень часто выступал в академии со своими докладами и критическими замечаниями. Имел трудный характер: был нелюдимым и вспыльчивым, проявлял грубость к коллегам. Он выдвигал в отношении Кавальери и Торричелли неоправданные претензии по поводу якобы заимствования ими его открытий, был антагонистом Декарта, хотя и ввел с ним переписку. О Робервале: [73; 72; 61; 1, т. 2].

Гюйгенс

Знаменитый нидерландский механик, математик, физик и астроном **Христиан Гюйгенс (1629–1695)** родился в Гааге, в дворянской семье. Его отец был высокообразованным дипломатом, хорошо знал языки и математику. Он дал своим четырем сыновьям прекрасное образование. Христиан учился на юридическом факультете университета в Лейдене, а затем в Бреде, но у него не было желания стать юристом. В Лейдене он слушал лекции по математике у Схоутена и подружился с ним. Схоутен связал его с Декартом,

а через Мерсенна – и с другими математиками. Вернувшись в Гаагу, Гюйгенс усердно занимается наукой и добивается больших успехов. В 1666 г. его избирают первым президентом Парижской академии наук, и он занимает этот пост в течение 15 лет, а затем возвращается в Гаагу.

В области анализа Гюйгенс занимается квадратурами конических сечений с помощью определения центров тяжести (1651), дает более удобный способ вычисления числа π, представляя площадь кругового сегмента в виде суммы ряда площадей специально подобранных многоугольников (1654). Ему принадлежат исследования трактрисы, логарифмической спирали, циссоиды, конхоиды, термин «цепная линия» и исследование свойств этой кривой, вычисление площади поверхностей вращения. Он проявил большое искусство в решении задач, относящихся к анализу, с помощью методов, применяемых еще с античных времен, был одним из немногих математиков XVII века, которые придерживались античного уровня строгости. Так, он находил точки перегиба кривых (конхоиды, кривой $y = kx^2(a - x)$ и др.) без помощи дифференциального метода Ферма, рассматривая эти точки как такие, в которых сливаются три точки пересечения кривой с прямой, и пользуясь при этом декартовым методом неопределенных коэффициентов.

Большое значение имели изобретение Гюйгенсом в 1657 г. часов с маятником и разработка математической теории движения маятника в труде «Маятниковые часы», написанном в 1665 г. и опубликованном в 1673 г. Здесь Гюйгенс показал, что таутохроной, т. е. кривой, по которой материальная точка скатывается вниз за одно и то же время, независимо от начального положения точки, является циклоида, и разработал в связи с этим теорию эволют и эвольвент. Здесь же он впервые получил, хотя еще и в довольно громоздком виде, выражение для радиуса кривизны кривой. **Эти его исследования кривых положили начало дифференциальной геометрии**, которая после возникновения еще долгие годы была составной частью анализа. Работа «Маятниковые часы» Гюйгенса вызвала большой интерес Лейбница и побудила его к занятиям инфинитезимальными вопросами и к созданию анализа бесконечно малых.

Но Гюйгенс не пользовался исчислением Лейбница, оставаясь сторонником геометрического подхода в использовании бесконечно малых.

Гюйгенс разработал также **довольно полно основы теории цепных дробей**. Развитие теории цепных дробей в XVII–XVIII вв. детально исследовано в кандидатской диссертации Э. М. Добровольской [220].

Трактат «О расчетах при игре в кости или при расчетах в азартных играх» (1657) Гюйгенса явился **первым крупным исследованием в теории вероятностей**. Здесь Гюйгенс вводит понятие математического ожидания для случайной величины, принимающей два или три значения, он оперирует с числом шансов, благоприятствующих событию, но понятие вероятности у него не сформировалось. Гюйгенсу принадлежат также большие заслуги в оптике и астрономии (он открыл кольцо Сатурна и его спутник Титан, полярные шапки Марса, полосы на Юпитере). О Гюйгенсе: [81; 71; 86; 61; 1, т. 2; 18], а также в книге: Веселовский И. Н. Христиан Гюйгенс. – М.: Учпедгиз, 1959. – 111 с.

Дезарг

Основы проективной геометрии заложил в XVII веке французский геометр, военный инженер и архитектор **Жирар Дезарг (1591–1662)**. Он родился в Лионе, а выйдя в отставку, поселился в Париже, посещал кружок Мерсенна.

Говорят, что пополнение прямой бесконечно удаленной точкой дает проективную прямую, а пополнение плоскости бесконечно удаленной прямой – проективную плоскость. Проективная геометрия изучает свойства фигур, инвариантных при всех так называемых проективных преобразованиях фигур. Одним из примеров проективных преобразований является центральное проектирование точек одной прямой на другую. Примером проективного инварианта является так называемое двойное (или сложное) отношение четверки точек A, B, C, D прямой, а именно $\frac{AC}{CB}:\frac{AD}{DB}$, кратко ($ABCD$). В настоящее время отрезки берут ориентированные.

Как уже отмечалось в ч. 1 пособия, у древнегреческого математика Аполлония (III век до н. э.) есть некоторые элементы проективной геометрии: он рассматривает гармонические четверки точек на прямой, проходящей через данную точку и пересекающей коническое сечение и поляру данной точки относительно конического сечения (термины «полюс» и «поляра» ввели, соответственно, французские математики Сервуа (1810) и Жергонн (1819)). Дальнейшее изучение двойных отношений четырех точек прямой предпринял древнегреческий геометр Папп (III век н. э.). В частности, он доказывает инвариантность двойного отношения четырех точек на прямой при центральном проектировании этих точек на любую другую прямую. Далее Папп формулирует так называемую теорему Дезарга и доказывает свою теорему о шестиугольнике, который получается соединением тройки точек на одной прямой с тройкой точек на другой прямой [Ч. 1 пособия, с. 51].

Через 14 веков после Паппа проективная геометрия возрождается в двух работах Дезарга. Уже Кеплер в одном сочинении 1604 г. говорит о том, что второй из фокусов параболы находится в бесконечности. Он по существу рассматривает непрерывный переход следующих кривых друг в друга: прямая, гипербола (одна ветвь), парабола, эллипс, окружность. Учение о перспективе в работах художников эпохи Возрождения способствовало введению понятия о бесконечно удаленной точке прямой («точка схода» параллельных линий).

В работе «Образец одного из общих способов… для употребления перспективы» (1636) Дезарг дает свой аналитический способ построения перспективных изображений точек по известным их координатам, а также доказывает теорему, носящую его имя: если у треугольников ABC и $A'B'C'$ на плоскости прямые, соединяющие соответственные вершины, пересекаются в одной точке, то точки пересечения их соответственных сторон или продолжений сторон лежат на одной прямой. Формулировку этой теоремы впервые привел Папп. Она проиллюстрирована рис. 11 в ч. 1 пособия. Иное расположение треугольников указано на рис. 24.

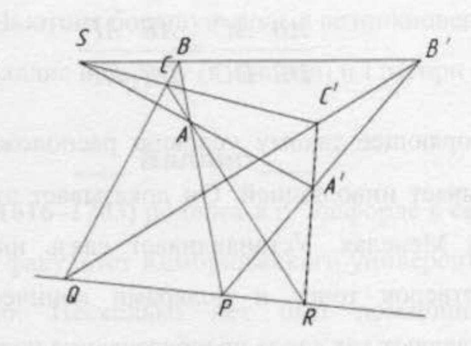


Рис. 24

В работе «Черновой набросок подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (1639) Дезарг вводит бесконечно удаленную точку (как точку пересечения пучка параллельных прямых) и бесконечно удаленную прямую (как прямую пересечения параллельных плоскостей). Тогда гиперболу и параболу можно рассматривать как замкнутые кривые, гипербола касается своих асимптот в двух бесконечно удаленных точках, а парабола – бесконечно удаленной прямой. Путем центрального проектирования Дезарг легко получает свойства конических сечений из соответствующих свойств окружности. В связи с полным четырехвершинником он вводит и исследует понятие инволюции. Полный четырехвершинник – это плоская фигура, которую образуют четыре точки (вершины), никакие три из которых не лежат на одной прямой, и шесть соединяющих их прямых (сторон). Дезарг установил следующую теорему:

Пусть *KLMN* – полный четырехвершинник, вписанный в коническое сечение, *EF* – любая прямая, пересекающая две противоположные его стороны, тогда (рис. 25)

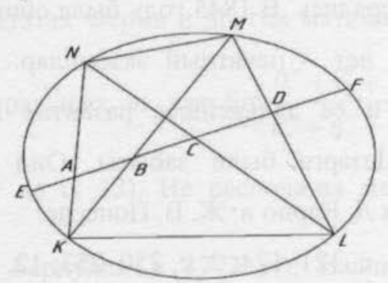


Рис. 25

$$\frac{AB \cdot AC}{DB \cdot DC} = \frac{AE \cdot AF}{DE \cdot DF}.$$

Удовлетворяющее такому условию расположение точек на прямой EF Дезарг называет инволюцией. Он доказывает эту теорему с помощью теорем Паппа и Менелая. Устанавливает связь инволюции с двойными отношениями четверок точек и полярами конических сечений. Сейчас инволюцию определяют как такое преобразование прямой, которое совпадает с ему обратным (т. е. $x' = \frac{a^2}{x}$ или $x' = -\frac{a^2}{x}$), это один из видов проективного преобразования прямой.

Одним из последователей Дезарга был Б. Паскаль, открывший в 16-летнем возрасте теорему о шестиугольнике, вписанном в коническое сечение, о которой он сообщил печатной афишей. Работа Паскаля о конических сечениях, в которой он получил с помощью своей и других теорем около 400 следствий, не была опубликована и затерялась после его смерти. Другим последователем Дезарга был **Филипп де Лагир (1640–1718)**, родившийся в Париже, профессор математики в Коллеж де Франс. В работе «Конические сечения» (1685) он вывел свойства кривых второго порядка из свойств окружности, доказав почти все теоремы Аполлония (свыше 300). Остальные математики XVII–XVIII вв. не проявили интереса к проективной тематике в геометрии. К тому же «Черновой набросок» Дезарга был труден для понимания из-за оригинальной терминологии Дезарга, имеющей в основном ботаническое происхождение. Он был напечатан лишь в 50 экземплярах, которые со временем затерялись. В 1845 году была обнаружена его неполная копия, а еще через 100 лет – печатный экземпляр. Очередное открытие проективной геометрии и ее дальнейшее развитие произошло в начале XIX в., когда работы Дезарга были забыты. Оно связано с именами французских математиков Л. Карно и Ж. В. Понселе.

О Дезарге: [1, т. 2, с. 121–124; 2, с. 250–253; 12, IX–X кл., с. 267–273; 9, с. 178–187; 28, с. 46–47, 178–188].

В Британии до Ньютона большую роль в возникновении математического анализа сыграли Валлис и Барроу (в Англии) и Грегори (в Шотландии).

Валлис

Джон Валлис (1616–1703) родился в г. Эшфорде в семье священника. Окончил богословский факультет Кембриджского университета. Математику изучал самостоятельно. Несколько лет был домашним священником в богатых дворянских домах, а в 1649 г. стал профессором геометрии Оксфордского университета. Он обладал феноменальной памятью, мог производить в уме очень сложные вычисления. Перевел и напечатал труды Архимеда, Птолемея и Аристарха Самосского. Был одним из учредителей в 1662 г. Лондонского королевского общества (академии наук).

Главный труд Валлиса «Арифметика бесконечных» (1656) сыграл большую роль в развитии теории интегрирования. С концепцией «неделимых» Кавальери Валлис познакомился по книге Торричелли. Но, в отличие от Кавальери, Валлис не сравнивает «все линии» одной фигуры со «всеми линиями» другой, а арифметизирует понятие интеграла (рассматриваемого как площадь), выражая его в виде предела отношения арифметических сумм. В противоположность античной традиции строгости, почти все свои результаты Валлис получает без строгих доказательств, а с помощью неполной индукции и интерполяции без обоснования ее законности (термин «интерполяция» принадлежит Валлису). Ему были известны результаты Кавальери вычисления интеграла $\int_0^x x^m dx$ для натуральных m, но он ничего не знал о более общих результатах Ферма и других математиков. Валлис вычисляет $\frac{1}{x^{m+1}}\int_0^x x^m dx$ для натуральных m как $\lim_{n\to\infty}\frac{0^m+1^m+...+n^m}{n^m+n^m+...+n^m}=\frac{1}{m+1}$ (см. также интегральную сумму на с. 32). Не располагая методом вычисления сумм $\sum_{k=1}^{n} k^m$ (его дал Я. Бернулли в 1773 г.), Валлис использует неполную

индукцию: вычисляет требуемые отношения при фиксированных m для многих значений n и находит закономерности. Например, для значений $n = 1, 2, ..., 6$ Валлис замечает, что $\frac{0^2 + 1^2 + ... + n^2}{n^2 + n^2 + ... + n^2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6n}$, и затем устремляет n к бесконечности (он впервые ввел и символ ∞). На основании таких рассуждений он приходит к выводу, что $\frac{1}{x^{m+1}} \int_0^x x^m dx = \frac{1}{m+1}$ при любом натуральном m, понимая левую часть этого равенства как отношение площадей. Валлис не дает ни определения предела, ни обозначения для него, не вводит также специального обозначения для интеграла.

После вычисления интеграла $\int_0^x ydx$, где $y = x^m$ при натуральных m, Валлис корректно находит интеграл $\int_0^y y^{\frac{1}{m}} dy = \int_0^y xdy$, исходя из того, что площади $\int_0^x ydx$ и $\int_0^y xdy$ дополняют друг друга до прямоугольника, имеющего площадь xy, т. е. $\int_0^y xdy = xy - \int_0^x ydx$. Далее он вычисляет $\int_0^1 x^{\frac{p}{q}} dx$ для рациональных $\frac{p}{q}$ с помощью интерполяций. Представление о его интерполяциях дает следующий простой пример. Известно, что $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$ и $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$, требуется вычислить $\int_0^1 x^{\frac{5}{4}} dx$. Для этого, по Валлису, нужно взять две прогрессии: геометрическую $x, x^{\frac{5}{4}}, x^{\frac{6}{4}}, x^{\frac{7}{4}}, x^2$ и арифметическую

$2,\ 2\frac{1}{4},\ 2\frac{2}{4},\ 2\frac{3}{4},\ 3$ (в последней числа 2 и 3 – знаменатели указанных выше дробей $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$). Тогда, по аналогии, степени $x^{\frac{5}{4}}$ отвечает дробь $\frac{1}{2\frac{1}{4}}=\frac{4}{9}$, поэтому $\int_0^1 x^{\frac{5}{4}}dx=\frac{4}{9}=\frac{1}{\frac{5}{4}+1}$ (а заодно получаются и интегралы $\int_0^1 x^{\frac{3}{2}}dx=\frac{1}{2\frac{1}{2}}=\frac{2}{5}$ и $\int_0^1 x^{\frac{7}{4}}dx=\frac{4}{11}$). Таким способом Валлис строит таблицу значений интеграла $\int_0^1 x^{\frac{p}{q}}dx$ для ряда натуральных p и q и из нее усматривает, что $\int_0^1 x^{\frac{p}{q}}dx=\frac{q}{p+q}$. Затем он распространяет интерполяцию на случай тех отрицательных показателей $\frac{p}{q}$, для которых $\int_0^1 x^{\frac{p}{q}}dx$ имеет конечное значение. Из работ математиков Ферма, Кавальери, Валлиса и других видно, какими сложными путями в истории математики шло вычисление интеграла от степенной функции.

Но самым замечательным в «Арифметике бесконечных» Валлиса является изложенное там его открытие бесконечного произведения $\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot...}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot...}$. Схему действий Валлиса в общих чертах можно передать следующим образом. Он вычисляет интегралы $I(p,q)=\int_0^1(1-x^{1/q})^p dx=\frac{p!q!}{(p+q)!}$ для натуральных p и q, разлагая подынтегральную функцию по формуле бинома. (Обозначение факториала

ввел французский математик Х. Крамп в 1806 г., а Валлис вместо $n!$ пишет $1\cdot 2\cdot ...\cdot n$.) Площадь четверти круга единичного радиуса равна $I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$. Вместо нее Валлис рассматривает величину $\frac{4}{\pi}=\frac{1}{I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)}$, которую обозначает знаком □. Путем интерполяций он распространяет интеграл $I(p,q)=\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{q}}\right)^p dx$ и на некоторые полуцелые значения p и q, составляет таблицу значений $\frac{1}{I(p,q)}$ для случаев, когда $q=\frac{1}{2}$ и $p=\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4,...$. Выбирая по 4 соседних элемента таблицы и сравнивая их отношения, Валлис получает оценки для □, т. е. для $\frac{4}{\pi}$, которые в пределе дают бесконечное произведение для $\frac{4}{\pi}$.

Отметим, что вычисленный Валлисом интеграл $\int_0^1\left(1-x^{\frac{1}{q}}\right)^p dx=\frac{p!q!}{(p+q)!}$ с помощью замены $x=t^q$ можно свести к интегралу $q\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^p\,dt=qB(q,p+1)= =qB(p+1,q)$. Труд Валлиса «Арифметика бесконечных» оказал влияние на Ньютона, а также на создание Эйлером теории B-функции. Гюйгенс нашел площадь между циссоидой $y=\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$ при $y\ge 0$ и ее асимптотой, выражаемую интегралом $\int_0^1\sqrt{\frac{x^3}{1-x}}dx=\frac{3\pi}{8}$, и предложил вычислить ее Валлису. Когда Валлис

вычислил его с помощью своего «арифметического» метода, Гюйгенс был поражен тем, как много можно достичь с помощью нестрогих рассуждений Валлиса. В «Арифметике бесконечных» ярко представлены эвристические приемы, характерные для творческой лаборатории математика (неполная индукция, заключения по аналогии, расширение понятий). Как известно, идея обобщения (расширения) понятий является одним из важнейших факторов развития математики.

В «Трактате о конических сечениях» (1656) Валлис показывает преимущества аналитического метода Декарта, впервые вводит отрицательные абсциссы. Он построил график функции $y = \sin x$. В «Трактате по алгебре» (1685) он, между прочим, приводит первую геометрическую интерпретацию комплексных чисел, отличную от используемой в настоящее время. В теории параллельных доказывает V постулат Евклида на основе предположения о существовании подобных (но не равных) треугольников. До Ньютона Валлис был самым известным английским математиком. О Валлисе: [78; 61; 1, т. 2].

Английский математик **Уильям Броункер (1620–1684)** родился в Ирландии, работал в Оксфордском университете и был одним из учредителей и первым президентом Лондонского королевского общества. Когда Валлис сообщил ему о своем открытии бесконечного произведения для $\frac{4}{\pi}$, Броункер в ответ привел представление для $\frac{4}{\pi}$ в виде бесконечной цепной дроби $\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \dots}}}}$ без указания способа его получения. (Вывод этого разложения путем преобразования ряда Лейбница $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} = \frac{\pi}{4}$ в цепную дробь указал XVIII в. Эйлер во «Введении в анализ бесконечных», §369, пример 2.)

Из других достижений Броункера укажем на его ряд $\ln 2 = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 4} + \frac{1}{5\cdot 6} + \ldots$, опубликованный в работе «Квадратура гиперболы с помощью бесконечного ряда рациональных чисел» (1668). Для получения этого ряда Броункер определенным образом разбивает квадрат $\{1 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1\}$, содержащий дугу гиперболы $y = \frac{1}{x}$, на части и с их помощью аппроксимирует площадь $\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln 2$ (см. [61, с. 300–301]).

Математики XVII в. предпочитали говорить не о логарифмах, а о квадратуре гиперболы $y = \frac{1}{x}$, т. к. в то время логарифмическая функция по существу была задана таблично, а потом в виде нового объекта – ряда, тогда как гипербола была хорошо известна с античных времен. А связь квадратуры гиперболы с логарифмами (в наших обозначениях она выражается формулой $\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln b - \ln a$, $a > 0,\ b > 0$) была установлена ранее Григорием из Сен-Винцента и Ферма. Но еще раньше Броункера ряд для $\ln 2$ в привычной нам записи

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \ldots$$

привел в 1659 г. итальянский математик **Пьетро Менголи (1625–1686)**, ученик Кавальери. Менголи определял натуральные логарифмы, исходя из сравнения площади криволинейной трапеции под гиперболой $xy = 1$ с площадями вписанных и описанных многоугольников.

Немецкий любитель математики, член Лондонского королевского общества **Николай Кауфман (1620–1687)**, более известный под латинизированной фамилией **Меркатор**, в работе «Логарифмотехника» в 1668 г. (т. е. в том же году, что и Броункер) привел общее разложение логарифмической функции (как квадратуры гиперболы $y = \frac{1}{1+x}$) в ряд

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots .$$

Он получил его почленным интегрированием геометрической прогрессии $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$. В том же году Валлис, восхищаясь результатом Меркатора, обратил внимание на то, что его ряд можно использовать для вычислений лишь при $|x| < 1$, а также привел ряд $\ln\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots$. Тогда же Грегори при $|x| < 1$ привел ряд $\ln\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots)$, удобный для составления таблиц логарифмов.

Раньше Меркатора его результат получил голландский математик Гудде (в 1656 г.), работавший много лет бургомистром Амстердама, а также Ньютон (в 1665 г.), но они хранили его в тайне.

Грегори

Глубоких результатов, относящихся к математическому анализу, достиг за свою короткую жизнь знаменитый шотландский математик **Джеймс Грегори (1638–1675)**. Он родился в Абердине и окончил там университет, затем несколько лет провел в Падуе (в Италии), где издал два труда по анализу. Вернувшись на родину, получил должность профессора в Сент-Андрусе, а в последний год жизни – в Эдинбурге. Он был избран членом Королевского общества. В работе «Истинная квадратура круга и гиперболы» (1667) Грегори сделал попытку доказать, что площадь произвольного сектора круга, эллипса и гиперболы нельзя точно выразить через площади вписанных и описанных многоугольников с помощью пяти алгебраических действий (четырех арифметических и извлечения корня), а нужно привлечь еще шестое действие – переход к пределу. В современных терминах это означает, что круговые функции (а также число π) и лога-

рифмическая функция не являются алгебраическими. Рассматривая при этом сходящиеся последовательности площадей вписанных и описанных многоугольников, **он впервые вводит термин «сходимость»** и широко им пользуется в этой работе. Кроме ряда для $\ln\frac{1+x}{1-x}$, Грегори получает ряды

$\varphi = tg\varphi - \frac{tg^3\varphi}{3} + \frac{tg^5\varphi}{3} - ...$ (т. е. ряд для $arctgx$); $tg\varphi = \varphi + \frac{\varphi^3}{3} + \frac{2\varphi^5}{25} + ...$;

$\sec\varphi = 1 + \frac{\varphi^2}{2} + \frac{5\varphi^4}{24} + ...$, а также ряды для $\ln\sec\varphi$ и $\ln tg(\frac{\varphi}{2} + \frac{\pi}{4})$, которые выводит интегрированием рядов для $tg\varphi$ и $\sec\varphi$. Эти ряды он сообщает в 1672 г. в письме к Коллинсу, который в Англии играл роль посредника в переписке ученых, подобно Мерсенну в Париже. О других глубоких достижениях Грегори стало известно только в XX в. из его бумаг. Оказывается, что Грегори владел рядом Тейлора задолго до Тейлора, опубликовавшего свое открытие в 1715 г. Вывел формулу приближенного интегрирования (формулу парабол), которую лишь в 1743 г. открыл английский математик Т. Симпсон. Примерно одновременно с Ньютоном и независимо от него Грегори получил биноминальный ряд в случае рациональных показателей, а также интерполяционную формулу, которая носит имя Ньютона. Большой заслугой Грегори является также то, что в работе «Универсальная часть геометрии» (1668) он указал на взаимно обратную зависимость задач на отыскание касательных и нахождение длины кривой (т. е. по существу на связь дифференцирования и интегрирования). Там же он указал способ преобразования прямоугольных координат к полярным. В XX в. выяснилось, что после Ньютона до Лейбница Грегори был крупнейшим математиком в области математического анализа. Недостатком у Грегори являлась словесно-геометрическая форма изложения. Ньютону и Лейбницу по существу удалось освободится от нее, ввести соответствующую символику и общие правила дифференциального и интегрального исчисления. О Грегори: [61; 1, т. 2; 79].

Барроу

Английский математик, филолог и богослов **Исаак Барроу (1630–1677)** родился в Лондоне в семье торговца тканями. Окончил богословский факультет в Тринити-колледже, одном из 16 колледжей Кембриджского университета. В течение четырех лет жил во Франции, Италии и Константинополе, изучал труды древних авторов на греческом и арабском языках. После возвращения в 1659 г. принял сан священника и был избран профессором греческого языка в Оксфорде, а в 1663 г. занял открывшуюся в Тринити-колледже кафедру математики. Учившийся уже два года в этом колледже Ньютон посещает лекции Барроу и вскоре становится его помощником, делая быстрые успехи в математике и физике. Видя это и желая посвятить себя богословию, Барроу в1669 г. уступает кафедру Ньютону, а сам становится придворным священником и, кроме того, возглавляет Тринити-колледж. В 50–70-х годах XVII в. Барроу публикует свои обработки «Начал» Евклида, переводы трудов Архимеда, Аполлония, а также свои многочисленные лекции по математике и оптике.

Наиболее значительные достижения Барроу, относящиеся к математическому анализу, были получены им еще до знакомства с Ньютоном, а опубликованы в «Геометрических лекциях» (1670), когда Ньютон уже сформулировал основные понятия и правила анализа, но не спешил с их опубликованием. До Ньютона явного понятия производной не было, ее роль играло отношение ординаты кривой к подкасательной, для отыскания которого Барроу использует также бесконечно малый треугольник с катетами-приращениями: e – для абсциссы, a – для ординаты (в обозначениях Барроу, рис. 26).

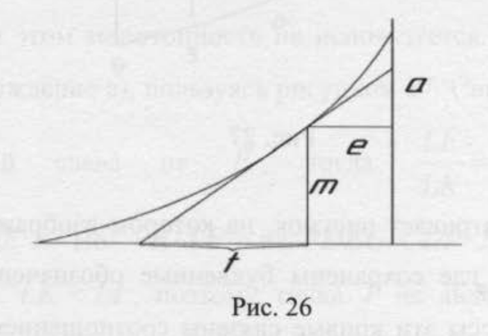


Рис. 26

Приращения ординаты кривой и ординаты касательной Барроу иногда отождествляет. Бесконечно малый треугольник (позже Лейбниц назвал его «характеристическим»), подобен треугольнику с конечными сторонами: t – подкасательной и m – ординатой точки касания, поэтому $\frac{m}{t} = \frac{a}{e}$. До Барроу на взаимно обратную связь задач на касательные с задачами на квадратуры обратили внимание: Торричелли (в кинематической форме) и Грегори (в геометрической), который выразил эту зависимость в 1668 г., сопоставляя спрямление произвольной кривой с построением подкасательной к ней. Но впервые взаимно обратную связь между касательными и квадратурами (в нашей терминологии между дифференцированием и интегрированием) наиболее полно показал Барроу, и это является важнейшей его заслугой.

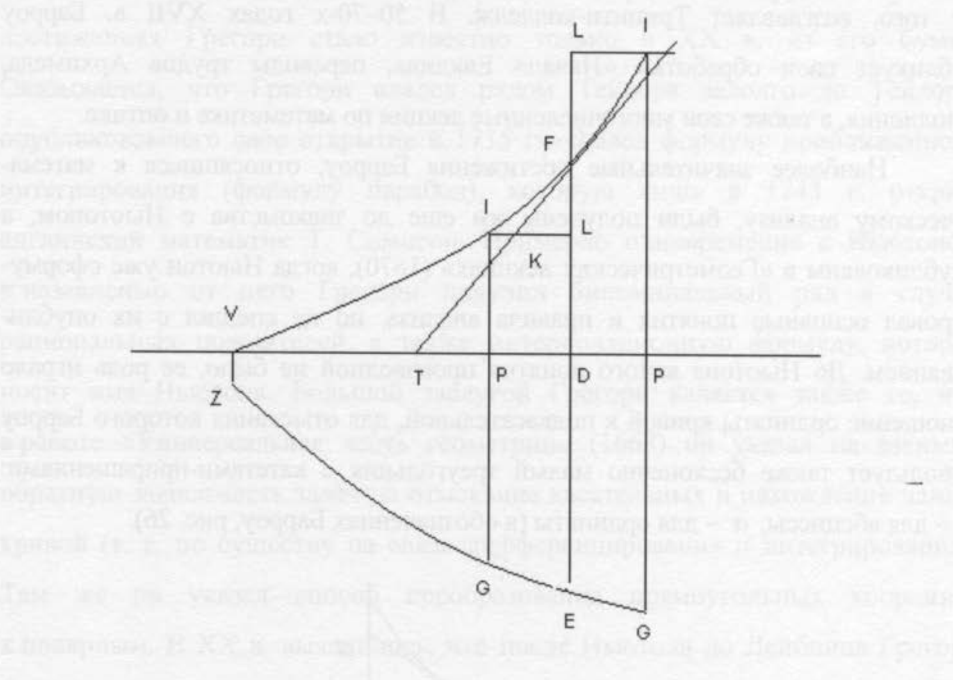


Рис. 27

Барроу рассматривает рисунок, на котором изображены две кривые: *ZG* и *VIFI* (рис. 27, где сохранены буквенные обозначения Барроу). Для каждой общей абсциссы эти кривые связаны соотношением вида $R \cdot DF =$

пл. $VDEZ$ (мы бы записали $Ry=\int_0^x \upsilon dx$, а у Барроу не было такой символики). Здесь постоянный множитель R у Барроу служит масштабным коэффициентом, который вводится для соблюдения размерности; уже начиная с Ньютона, многие полагают $R=1$, а мы – тем более, но здесь сохраняем его, как в оригинале. Барроу фактически первый имеет дело с первообразной $R\cdot DF$, заданной геометрически в виде переменной площади криволинейной трапеции (пл. $VDEZ$ на рис. 27). Используя наши обозначения и понятие производной, можно теорему Барроу кратко выразить следующим образом: если $Ry = \int_0^x \upsilon dx$, то $Ry' = \upsilon$ и обратно. У Барроу еще нет понятия производной, роль y' у него выполняет отношение $\frac{DF}{DT}$, где $m=DF$ – ордината кривой в точке касания, а $t=DT$ – подкасательная. Поэтому Барроу формулирует теорему не в столь общей форме, а, по существу, следующим образом: Для кривых с возрастающими ординатами справедливы утверждения:

а) если $R\cdot DF=$ пл. $VDEZ$ и $R\frac{DF}{DT}=DE$, то TF – касательная в точке F;

б) если TF – касательная в точке F и $R\frac{DF}{DT}=DE$, то $R\cdot DF=$ пл. $VDEZ$.

Барроу дает сначала кинематическое доказательство, ссылаясь на Торричелли, при этом монотонность не используется. Затем геометрически доказывает утверждение а), пользуясь рисунком 27. Сначала берется точка I верхней кривой слева от F, тогда $\frac{LF}{LK}=\frac{DF}{DT}=\frac{DE}{R}$, откуда $R\cdot LF = LK\cdot DE$. Но $R\cdot LF=$ пл. $PDEG < DP\cdot DE$. Следовательно, $LK<DP$, т. е. $LK<LI$, поэтому точка I не является точкой касания.

Аналогично рассматривается и случай, когда точка I берется справа от F. Таким образом, кривая расположена по одну сторону от прямой TF, проходящей через ее точку F, поэтому TF – касательная. (В то время понятие касательной было более узким, чем сейчас: вблизи точки касания кривая должна была располагаться по одну сторону от касательной.)

Доказательство утверждения б), т. е. решение обратной задачи (дано $y' = \frac{\upsilon}{R}$, доказать, что $Ry = \int_0^x \upsilon dx$), Барроу проводит на другом рисунке и в других обозначениях. С помощью наших обозначений это доказательство можно передать следующим образом. По условию $\frac{m}{t} = \frac{\upsilon}{R}$, где t – подкасательная к кривой с ординатой m в точке касания. На этой кривой Барроу берет «бесконечно малый отрезочек» и рассматривает вертикальную полоску, которая «сколь угодно мало» отличается от прямоугольника. Используя равенство вида $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{m}{t}$, он получает $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\upsilon}{R}$, откуда $R\Delta y = \upsilon \Delta x$. Далее Барроу суммирует эти элементарные площади и говорит, что, таким образом, «утверждение является достаточно ясным». Как видно, он не считает последнее доказательство строгим. Оно вполне в духе математики XVII в. и напоминает современные рассуждения на «физическом» уровне строгости с тем лишь отличием, что вместо x и y Барроу использует другие обозначения. Рассуждения Барроу, хотя и не вполне строгие, говорят о его большой проницательности в установлении факта взаимной обратимости дифференцирования и интегрирования еще до введения общих понятий производной и интеграла.

Другим важнейшим достижением Барроу является установление теоремы о замене переменных в интеграле, роль которого у него играет площадь фигуры. Его геометрическую формулировку этой теоремы можно передать в наших обозначениях в виде: пусть x и y – координаты точек монотонной кривой $y = y(x)$, p – наклон касательной к этой кривой

в точке (x, y). Если функции $f(x)$ и $g(y)$ удовлетворяют условию $\frac{f(x)}{g(y)} = p$ для любой пары (x, y), то площади $\int f(x)dx$ и $\int g(y)\,dy$, взятые в соответствующих пределах, равны и обратно. Здесь переход от $p = \frac{f(x)}{g(y)}$ (т. е. фактически от дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)}$) к квадратурам равносилен интегрированию дифференциального уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. В то время задачи на касательные, которые решались путем сведения к квадратурам, называли обратными задачами на касательные, а термин «дифференциальные уравнения» был введен позже Лейбницем.

В «Лекциях» Барроу встречается неравенство $(1+x)^n > 1+nx$ ($x > 0$, целое $n > 1$), которое сейчас называют неравенством Я. Бернулли, который опубликовал его на 20 лет позже. Барроу много занимался оптикой, открыл формулу линзы. О Барроу: [73; 78; 61; 3; 1, т. 2; 86].

Из предыдущего обзора видно, как быстро в первые две трети XVII в. продвигалась разработка методов решения задач, относящихся к математическому анализу, с использованием бесконечно малых. Были созданы как интеграционные методы (вычисления площадей, объемов, длин дуг, центров тяжести и др.), так и дифференциальные (отыскание касательных, экстремумов, точек перегиба, исследование кривизны кривой и др.), обнаружена взаимно обратная связь этих методов. Однако в целом эти результаты еще не составляли науки: не было единой системы общих понятий, подчиненных общим правилам (алгоритму) действий, а также единой символики, которая позволяла бы однообразно осуществлять необходимые вычисления, «механизировать» их. Создание этих понятий, символики и правил, оформления анализа бесконечно малых как науки является огромной заслугой Ньютона и Лейбница, которые обобщили достижения своих предшественников и добились дальнейших успехов. Ньютон писал: «Если я видел дальше других, то лишь потому, что стоял на плечах гигантов».

Ньютон

Гениальный английский математик, механик и физик **Исаак Ньютон (1643–1727)** родился в деревне Вульсторп в 75 км от Кембриджа в семье фермера, умершего до рождения сына. Исаака воспитывала бабушка, т. к. мать снова вышла замуж и уехала, а вернулась в 1656 г., после смерти второго мужа. После окончания школы Ньютон в 1661 г. поступил в Кембриджский университет в Тринити-колледж. Через два года здесь открылась кафедра математики, на которую был приглашен Барроу. Ньютон стал посещать его лекции, но они были довольно элементарными, в отличие от опубликованных в 1670 г. «Геометрических лекций» Барроу, не предназначавшихся для чтения в аудитории. Глубоких знаний в математике Ньютон достиг, как это видно из его выписок, в результате самостоятельного изучения «Геометрии» Декарта, «Арифметики бесконечных» Валлиса, «Начал» Евклида, трудов Виета, Оутреда, 6-томного «Курса математики» Эригона. В это время в Лондоне свирепствовала эпидемия чумы, от которой умерло около 100 тыс. жителей. Перерыв занятий в университетах («чумной отпуск» 1665–1666 гг.) Ньютон проводит у себя в деревне и усиленно занимается математикой. В заметках и рукописях этого периода он излагает свое открытие биномиального ряда и других степенных рядов, формулирует основы анализа бесконечно малых («метода флюксий»), сопровождая их приложениями, начинает заниматься классификацией кривых 3-го порядка, размышляет над вопросами тяготения. Научный взлет Ньютона был столь стремителен, что, как пишет Д. Т. Уайтсайд, издавший в Англии в 1967–1981 гг. 8 томов «Математических рукописей» Ньютона, за два года Ньютон сравнялся с Гюйгенсом и Грегори и превзошел остальных математиков. В 1669 г. Барроу передает кафедру математики Ньютону.

Ньютон не спешит с публикацией своих работ, не желая быть втянутым в полемику по поводу своего «метода флюксий». В 1669 г. он пишет работу «Об анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов», изданную лишь в 1711 г. Обширный труд «Метод флюксий

и бесконечных рядов» был написан им в 1670–1671 гг., но для него не нашлось издателя, и он был опубликован лишь в 1736 г., после смерти Ньютона. Первой опубликованной работой Ньютона по анализу была работа «Рассуждение о квадратуре кривых», написанная в 1691–1692 гг. Она была издана в 1704 г. вместе с его фундаментальным трудом «Оптика» и «Перечислением кривых…» [215]. Впрочем, Ньютон знакомил английских математиков со своими рукописями еще раньше через секретаря Королевского общества Г. Ольденбурга и через Дж. Коллинса, выполнявшего в Англии функции посредника в переписке между учеными. Заметим, что Лейбниц разработал основы исчисления бесконечно малых на 10 лет позже Ньютона, а опубликовал в 1684 г., на 20 лет раньше, чем Ньютон. В 1671 г. Ньютон строит большой зеркальный телескоп с диаметром зеркала 2 м (первый небольшой экземпляр он построил в 1668 г.). Результатом было избрание Ньютона членом Лондонского королевского общества. Огромный труд Ньютона «Математические начала натуральной философии» опубликовал за свои средства английский астроном Галлей в 1687 г. (в то время натуральной философией называли физику). В нем на аксиоматической основе Ньютон дал построение земной и небесной механики. Здесь приведены три закона Ньютона, а также закон всемирного тяготения, из которого Ньютон вывел три закона Кеплера движения планет, найденные Кеплером экспериментально, из наблюдений. «Начала» содержат также основы теории потенциала и теорию движения Луны. Из вопросов, относящихся к математическому анализу, в «Началах» следует отметить первое изложение теории пределов и теорему о «моменте» (т. е. дифференциале) произведения. В этом труде Ньютон широко пользуется верхними и нижними суммами и другой инфинитезимальной техникой, но излагает материал геометрически, без помощи своего «метода флюксий», который он к тому времени еще не обнародовал [216].

С 1696 г. Ньютон находится в Лондоне в должности смотрителя Монетного двора, с 1699 г. – его директора, а с 1703 г. возглавляет еще и Королевское общество. Из других занятий Ньютона отметим [82, гл. 11 и 15],

что он многие годы (особенно до 1684 г.) занимался алхимией, а в последние годы жизни – теологией и античной хронологией. В 1689 г. и 1704 г. его избирают членом парламента, а в 1705 г. он первым из английских ученых получает дворянский титул сэра за научные заслуги.

Основы математического анализа Ньютон систематически изложил в обширной работе «Метод флюксий и бесконечных рядов с приложением его к геометрии кривых». Главные понятия анализа у Ньютона носят кинематический характер. Сначала Ньютон формулирует две основные взаимно обратные задачи анализа в терминах механики: в каждый момент дана длина пройденного пути, требуется найти скорость движения в данное время и обратно – по заданной скорости найти путь. Затем эти две основные задачи формулируются в общем виде с помощью введенных Ньютоном терминов «флюэнта» и «флюксия». Это уже переменные величины общего вида, несмотря на кинематическое происхождение терминов. Именно: это текущие величины – флюэнты (от лат. *fluere* – течь) и скорости их изменения – флюксии (от лат. *fluxio* – течение). Таким образом, флюксии – это наши производные, а флюэнты – их первообразные. Ньютон рассматривает величины как непрерывно изменяющиеся в зависимости от переменной, которая «течет равномерно» и может рассматриваться как время. Ньютон обозначает флюэнты обычно последними буквами алфавита: $x, y, z, ..$, а их флюксии – теми же буквами, но пунктированными: $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}...$ Позже Ньютон в письме к Валлису рассматривал и флюксии высших порядков, например, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ и т. д. Дифференциалы Ньютон называет «моментами». «Момент» времени (и, вообще, независимой переменной) он обозначает буквой o, а момент флюэнты z – через $\dot{z}o$. Эти его обозначения соответствуют нашим dt и $z'(t)dt$. В терминах флюэнт и флюксий две основные задачи анализа Ньютон формулирует следующим образом:

I. По данному соотношению между флюэнтами определить соотношение между флюксиями.

II. По данному уравнению, содержащему флюксии, найти соотношение между флюэнтами.

Метод решения первой задачи Ньютон иллюстрирует примером: дано соотношение между флюэнтами $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$, найти соотношение между флюксиями. Он подставляет $x + \dot{x}o$ и $y + \dot{y}o$ в уравнение, из полученного уравнения вычитает левую часть исходного уравнения и делит результат на бесконечного малую o, а затем отбрасывает члены, содержащие бесконечно малые, и окончательно получает $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + ay\dot{x} + ax\dot{y} - 3y^2\dot{y} = 0$. По существу, Ньютон здесь дифференцирует сложную функцию $f(x(t),\ y(t))$ и в результате приходит к уравнению вида $\frac{\partial f}{\partial x}\dot{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\dot{y} = 0$. Ранее подобным образом действовал уже Ферма, но в других обозначениях. Ньютон отмечает: «Намек на метод (флюксий) я получил из способа Ферма проведения касательных; применяя его к абстрактным уравнениям, я сделал его общим». В отличие от Ферма, Ньютон ввел общие понятия производной (флюксии) и дифференциала (момента). На их кинематическую трактовку повлияли университетские лекции Барроу, а также его «Геометрические лекции», первые три из которых посвящены свойствам движения, течению (*fluxus*) величин во времени, образованию кривых движением точки и т. п. Заметно и влияние Галилея. Уже в студенческих заметках 1664–1665 гг., возникших под влиянием комментариев к «Геометрии» Декарта нидерландских математиков Схоутена, Гудде, ван Хейрата, Ньютон находит подкасательные и поднормали с использованием бесконечно малой и характеристического треугольника. В «Методе флюксий» Ньютон не приводит правил дифференцирования. Но в одной из рукописных заметок он формулирует 4 аксиомы дифференци-

рования, из которых выводит ряд теорем и следствий, относящихся к правилам дифференцирования. Теорема 1 утверждает, что если $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$, то $A\cdot flD+D\cdot flA=B\cdot flC+C\cdot flB$ (в обозначениях Ньютона), откуда получаются правила дифференцирования произведения, частного, степени и корня. В «Началах» Ньютон из дифференциального исчисления приводит только лемму о моменте (т. е. дифференциале) произведения и ее следствия. В своих работах и рукописях по анализу Ньютон свободно применяет технику дифференцирования к нахождению наибольших и наименьших значений функции, точек перегиба, проведению касательных и нормалей к кривым, определению кривизны кривой (он ввел понятия и термины «круг кривизны», «радиус кривизны» и «центр кривизны»), а также решает некоторые уравнения, содержащие флюксии. В «Методе флюксий» Ньютон помещает также две обширные таблицы квадратур (первообразных) от рациональных функций и иррациональностей.

Интегральное исчисление в XVII в. еще до Ньютона и Лейбница было разработано более подробно, чем дифференциальное, и по существу до конца XVII в. обходились без введения нового общего понятия интеграла. Его роль у Ньютона и Лейбница по-прежнему выполняла площадь криволинейной трапеции – чаще переменная, что соответствовало нашему неопределенному интегралу (первообразной) $\int_0^x f(t)dt$, реже – числовая, т. е. наш определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$. Ньютон отмечает, что к вычислению «площади кривой», т. е. площади криволинейной трапеции, сводятся вычисления объемов, длин дуг и координат центра тяжести.

Если в первой половине XVII в. занимались частными случаями определенных интегралов в геометрическом виде, то, начиная с Ньютона и Лейбница, на повестку дня выдвигается разработка общих методов отыскания первообразных в аналитическом виде. В более простых случаях (напри-

мер, для суммы степенных функций с рациональными показателями) Ньютон в «Методе флюксий» находит первообразные, используя взаимную обратимость дифференцирования и интегрирования. В более сложных случаях (вроде нахождения первообразной для $\sqrt{a^2 \pm x^2}$, $\sqrt{a^2 - bx - x^2}$ и т. п.) универсальным методом интегрирования функций у Ньютона является разложения функций в степенные ряды и их почленное интегрирование, хотя и без обоснования законности последнего. Отметим, что основной теоремы интегрального исчисления (формула Ньютона–Лейбница) в ее современном виде не было ни у Ньютона, ни у Лейбница, т. к. еще даже не было введено общее обозначение для функции. Однако смысл этой теоремы был им хорошо известен. Ньютон в «Методе флюксий» высказывает ее мимоходом следующим образом: «Для получения должного значения площади, прилежащей к некоторой части абсциссы, эту площадь всегда следует брать равной разности значений *z*, соответствующих частям абсцисс, ограниченных началом и концом площади» (здесь имеется в виду $\int\limits_a^b f(x)dx = z(b) - z(a)$, где $z(x) = \int\limits_0^x f(t)dt$). Этот факт был известен также и Барроу, что видно из его доказательства теоремы о взаимной обратимости действий дифференцирования и интегрирования (см. рис. 27 и равенство $R \cdot LF =$ пл. $PDEG$, где удобно считать, что $R = 1$, при этом LF есть приращение первообразной DF).

Проблемам интегрирования и разложения функций в ряды посвящена небольшая работа Ньютона «Об анализе с помощью уравнений с бесконечным числом членов», написанная в 1669 г., ранее «Метода флюксий», и вскоре ставшая широко известной в Англии благодаря Барроу и Коллинсу. Известно, что Виет называл алгебру анализом (конечных величин). Ньютон предлагает называть новое исчисление «анализом с помощью уравнений с бесконечным числом членов», т. е. анализом с помощью рядов. Отсюда ведет происхождение современное название «математический анализ».

В работе «Об анализе» Ньютон приводит три правила для отыскания квадратур кривых:

1) квадратура «простой кривой» вида $y = ax^{\frac{m}{n}}$ для рациональных $\frac{m}{n} \neq -1$;

2) квадратура «сложных кривых», т. е. сумм степеней;

3) квадратура всех других кривых с помощью разложения ординат кривых в степенные ряды.

Правило 1) утверждает, что если площадь криволинейной трапеции равна $z = \frac{na}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}}$, то ордината кривой есть $y = ax^{\frac{m}{n}}$ и обратно (здесь $\frac{m}{n} \neq -1$ есть рациональное число). Ньютон доказывает это правило дифференцированием следующим образом: полагает $\frac{na}{m+n} = c$, $m + n = p$, переписывает выражение для площади в виде $z^n = c^n x^p$ и подставляет сюда $z + oy$, $x + o$ вместо z и x, отбрасывает равные члены z^n и $c^n x^p$, делит на бесконечно малую o и опускает в конечном равенстве члены, содержащие o. В результате после несложных элементарных преобразований получает, что $y = ax^{\frac{m}{n}}$. Так впервые путем дифференцирования предлагаемой первообразной была проинтегрирована степенная функция ax^{α} при рациональных $\alpha \neq -1$. Ньютон приводит и не связанное с частным видом кривой геометрическое доказательство взаимной обратимости дифференцирования и интегрирования.

Очень большое значение, особенно для целей интегрирования, Ньютон придавал разложению функций в степенные ряды. Ещё будучи студентом, зимой 1664 – 1665 гг. он получил биномиальный ряд для $(1+x)^{\alpha}$ при рацио-

нальных α. Познакомившись с вычислением определенных интегралов, рассматриваемых как площади, в «Арифметике бесконечных» Валлиса, Ньютон разлагает площади под кривыми $y=(1+x)^n$ и $y=(1+x)^{\frac{n}{2}}$ на $[0,\ x]$ по степеням *x*. Для натуральных показателей формула бинома в то время была хорошо известна, а в случае положительных полуцелых показателей Ньютон подмечает по аналогии закон образования коэффициентов бинома и распространяет его (интерполирует) и на рациональные показатели вообще. В частности, он получает ряд для площади под гиперболой $y=(1+x)^{-1}$, т. е. для $\ln(1+x)$, а также ряд для $\arcsin x$. В работе «Об анализе» Ньютон показывает, как можно обращать ряд, т. е. по нескольким членам ряда для данной функции с помощью метода неопределенных коэффициентов находить соответствующее число членов для обратной к ней функции. Обращая ряд для $\arcsin x$, он получает ряд по степеням *x* для $\sin x$, а затем по формуле $\cos x=\sqrt{1-\sin^2 x}$ находит и ряд для $\cos x$. Путем обращения ряда для $\ln(1+x)$ он получает и ряд для e^x.Следует заметить, что в XVII в. еще не было терминов «логарифмическая функция», «показательная функция», а также обозначений для них. Вместо функции $\ln(1+x)$ Ньютон говорит о «площади гиперболы *ABCD*», имея ввиду площадь *z* криволинейной трапеции под дугой DC гиперболы $y=\dfrac{1}{1+x}$ на отрезке $AB=[0,\ x]$, а в роли функции $x=e^z-1$, обратной к $z=\ln(1+x)$, у него выступает «основание AB», имеющее длину *x*. Путем деления он разлагает в степенной ряд рациональные функции, делит ряд на ряд, получает ряды путем арифметического извлечения корней, выражает в виде ряда корни буквенных алгебраических уравнений. Для разложения функций, заданных неявно уравнением $F(x,y)=0$, в ряд по рациональным степеням x Ньютон изобрел так называемый «метод многоугольника» [69, с. 66–67] . Ему же принадлежит метод решения

дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов с неопределенными коэффициентами.

В 1676 г. Ньютон послал через Ольденбурга два письма Лейбницу, еще не зная, что Лейбниц независимо разработал в 1675 г. основы исчисления бесконечно малых. В первом письме Ньютон приводит биномиальный ряд в случае рациональных показателей. В следующем объясняет, как он пришел к открытию этого ряда, а о сущности своего метода флюксий и о своем методе решения дифференциальных уравнений с помощью рядов сообщает в зашифрованном виде. Кроме того, в этом письме он утверждает, что площадь под кривой $y = x^m(a + bx^n)^p$, т. е. интеграл от биномиального дифференциала, принимает конечную и притом алгебраическую форму, если $\frac{m+1}{n}$ и $\frac{m+1}{n} + p$ суть натуральные числа (у него в других обозначениях). Отметим, что все три случая интегрируемости биномиального дифференциала в элементарных функциях установили Гольдбах и Эйлер в своей переписке в 1729–1730 гг., а единственность этих случаев (при рациональных показателях) доказал П. Л. Чебышёв в 1853 г. В ответном письме Ньютону в 1677 г. Лейбниц излагает свои основы дифференциального исчисления, отличающиеся от метода флюксий, по существу, лишь терминологией и более удобной символикой. Ньютон не ответил на это и два следующих письма Лейбница, их переписка закончилась.

Понятие о сходимости ряда в XVII в. еще отсутствовало, но Ньютон знал, что некоторые ряды более удобны для приближенных вычислений и есть ряды, имеющие бесконечную сумму (знакопостоянные расходящиеся ряды он называет «ложными»). В одной из своих рукописей он излагает метод преобразования сходящихся рядов в быстрее сходящиеся, а расходящихся знакочередующихся – в сходящиеся. В XVIII в. этот метод был вновь открыт Эйлером и носит его имя.

Небольшая работа Ньютона «Рассуждение о квадратуре кривых» является третьей (и последней) по времени написания его работой по

математическому анализу. Она написана в 1691–1692 гг. и опубликована в 1704 г., это первая его публикация по математическому анализу. Следует отметить, что Лейбниц опубликовал свои работы по основам математического анализа на 20 лет раньше, а за эти 20 лет Якоб и Иоганн Бернулли вместе с Лейбницем уже далеко продвинулись в разработке математического анализа и дифференциальных уравнений. В работе «Рассуждение о квадратуре кривых» Ньютон более подробно рассматривает вопрос об интегрировании иррациональностей, в частности рациональных функций от $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и сводящихся к ним. В этой работе он впервые обозначает флюксии пунктированными буквами, например, $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$ и т. д., а до этого обозначал через p, q, r и т. д. Кроме того, для интегралов (первообразных) он вводит обозначения $'x$, $''x$ и т. д., что соответствует нашим $\int x(t)dt$, $\int(\int x(t)dt)$ и т. д. Ранее у него встречалось обозначение интеграла в виде прямоугольника. Его обозначения интегралов не привились в силу очевидного неудобства по сравнению с современным обозначением, введенным Лейбницем. В рассматриваемой работе Ньютон выводит производную от x^n при рациональных n путем вычисления предела отношения $\dfrac{(x+o)^n-x^n}{o}$, когда o стремится к нулю, при этом он использует разложение $(x+o)^n$ в ряд по степеням o. В одном фрагменте рукописи этой работы, не вошедшем в печатный текст, Ньютон приводит в общем виде разложение функции (ординаты кривой) в ряд по степеням x, полученное через 20 лет и опубликованное Б. Тейлором, названное позже рядом Тейлора. Как уже отмечалось выше, Дж. Грегори в XVII в. независимо от Ньютона также открыл биномиальный ряд в случае рациональных показателей и владел рядом Тейлора. Отметим еще, что в работе «Рассуждение о квадратуре кривых» Ньютон уже вводит произвольную постоянную при нахождении неопределенных интегралов.

Понятие определенного интеграла как предела верхних или нижних сумм, понимаемых геометрически, Ньютон широко использует в своем главном труде «Математические начала натуральной философии» (1687), посвященном механике, а в других работах имеет дело с производными и неопределенными интегралами, или с определенными интегралами в виде разности первообразных. В I отделе I книги «Начал» он приводит 12 лемм о пределах с целью «избежать утомительности длинных доказательств», если их излагать «по образцу древних на приведении к нелепости». Ссылки на эти леммы в доказательствах у Ньютона заменяют «метод исчерпывания». Леммы Ньютона о пределах – это не утверждения об общих свойствах предела функции, т. к. не упоминается даже об арифметических свойствах пределов. Речь идет о равенстве пределов отношений площадей следующих фигур: криволинейной трапеции и вписанных в нее и описанных фигур, состоящих из прямоугольников (или трапеций), а также о равенстве пределов отношений длины дуги кривой, хорды и отрезка касательной к кривой. Пределы величин («количеств») и отношений Ньютон называет либо «первыми отношениями зарождающихся количеств», либо «последними отношениями исчезающих количеств». «Последние отношения, – пишет он, – с которыми исчезают количества, не суть на деле отношения последних количеств, но те пределы, к которым непрестанно приближаются отношения безгранично убывающих количеств и к которым они могут подойти ближе, нежели на любую наперед заданную разность, но которых не могут ни превзойти, ни достигнуть ранее, чем количества уменьшатся бесконечно». Ньютон впервые вводит термин «предел» (латинское *limes*) без сокращенного обозначения. По поводу существования предела он ссылается на очевидную механическую наглядность о существовании мгновенной (односторонней) скорости тела в данный момент времени: «Существует предел, которого скорость может достигнуть, но не может превзойти. Это и есть последняя скорость. Такова же причина существования предела всех зарождающихся и исчезающих количеств и отношений». Существование производных (флюксий) у Ньютона также имеет механическое (точнее, квазимеханическое)

объяснение. Придавая огромное значение механике, Ньютон вообще считал, что «геометрия основывается на механической практике и есть не что иное, как та часть общей механики, в которой излагается и доказывается искусство точного измерения». Заметим, что сведение общематематических понятий к понятиям механики неправомерно как с античной, так и с современной точек зрения. Однако важно, что своими леммами о пределах Ньютон сделал очередной шаг к теории пределов, отказавшись от проведения «метода исчерпывания» в каждом конкретном случае, заменил этот метод общей абстрактной схемой пределов тех величин или их отношений, которые в нем рассматриваются. В «Началах» Ньютон не пользуется теорией флюксий, приводит лишь лемму о моменте (дифференциале) произведения и примеры вычисления моментов степеней.

Ряд задач в «Началах» можно записать в виде дифференциальных уравнений ($\ddot{z} = -n^2 z$, $\ddot{z} = g \pm \frac{1}{g}\dot{z}^2$, $\dot{v} v + ns = \pm m v^2$ и др.), но Ньютон формулирует их словесно в терминах сил и скоростей и решает те задачи геометрически, используя свойства конических сечений, элементарные части фигур и переход к пределу. Действия, аналогичные интегрированию с помощью разбиения фигур на элементарные части, он выполняет и при решении задач теории потенциала (о притяжении точки сферой, шаром, сферическим слоем, шаровым сегментом, о взаимном притяжении двух шаров).

В геометрии Ньютон еще со студенческих лет занимался классификацией кривых 3-го порядка, а затем изложил ее без доказательств в работе «Перечисление кривых третьего порядка», опубликованной в 1704 г. Он приводит 72 вида этих кривых, отмечая, что их можно получить проектированием из основных пяти видов. В 1717 г. Стирлинг снабдил эту работу доказательствами.

В алгебре Ньютон дал методы численного решения алгебраических уравнений, теоремы о симметрических функциях от корней уравнений,

интерполяционную формулу и др. Большой популярностью пользовалась «Всеобщая арифметика» Ньютона, изданная в 1707 г. и содержащая 97 лекций по алгебре, прочитанных Ньютоном в 1673–1683 гг. Она выдержала ряд изданий и оказала значительное влияние на развитие алгебры и ее преподавание.

О Ньютоне: [82–86; 1, т. 2; 3–5; 69; 61; 73; 74; 78; 79; 215–217].

Лейбниц

Наряду с Ньютоном, основателем математического анализа является **Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646–1716)** – гениальный немецкий математик, физик и философ, один из наиболее универсальных ученых в истории человечества. Он родился в Лейпциге в семье профессора этики Лейпцигского университета. В автобиографической заметке Лейбниц указывает на дальнее славянское происхождение своих предков по фамилии Любенец. В возрасте шести лет он лишается отца. В школьные годы увлекается латинским и греческим языками, изучая их в основном самостоятельно по книгам древних авторов в отцовской библиотеке. После окончания школы поступает на юридическое отделение философского факультета Лейпцигского университета. Там он увлекается философией Декарта, но по математике приобретает лишь элементарные сведения, поскольку в отношении новой математики Германия в ту пору была глубокой провинцией.

С 1666 г., после защиты диссертации на степень доктора права, Лейбниц в течение пяти лет работает в г. Майнце при дворе курфюрста. В 1672 г. он отправляется в Париж с дипломатическим поручением и для продолжения образования, проживает там около 4 лет. В Париже Лейбниц сближается с Гюйгенсом, по совету которого начинает изучать математические работы своих современников (Декарта, Паскаля, Валлиса, Григория из Сен-Винцента, Кавальери и др.). Работы Паскаля наводят его на мысль о возможности обобщения разрозненных в то время методов исчисления бесконечно малых. В 1673 г. Лейбниц совершает двухмесячную поездку

в Лондон, где знакомится с английскими математиками. Однако с Ньютоном, находившимся в Кембридже, ему встретиться не удалось. Лейбниц демонстрирует Королевскому обществу свою счетную машину, выполнявшую 4 арифметических действия, а также возведение в степень и извлечение корней. В результате его избрали членом Королевского общества. Но в отношении чистой математики Лейбниц произвел на англичан впечатление дилетанта.

Возвратившись в Париж, Лейбниц усиленно занимается математикой и вскоре добивается больших успехов. Стремясь к созданию собственного универсального математического языка, он в октябре–ноябре 1675 г., находясь в Париже, разрабатывает основы (символику и правила) дифференциального и интегрального исчисления, не будучи знакомым с работами Ньютона по анализу, написанными на 10 лет раньше, но к тому времени не опубликованными. Эти свои результаты Лейбниц опубликовал в двух статьях в 1684 г. и в 1686 г., которые мы будем рассматривать ниже. С 1676 г. и до конца жизни Лейбниц проживает в Ганновере, находясь на службе у правителей княжества Брауншвейг в качестве сначала библиотекаря, а затем придворного советника, инженера и историографа династии правителей княжества. В это время он интенсивно занимается философией, математикой, историей, физикой, ведет обширнейшую переписку, в частности с Якобом и Иоганном Бернулли и Лопиталем, которые вскоре подключились к разработке анализа бесконечно малых.

До Канта Лейбниц был самым видным из немецких философов. Его идеалистическая философская система описывает все многообразие живого мира природы как иерархию монад – вечных и неизменных духовных субстанций, которыми якобы наделены все представители живой природы. При этом монадам присуща большая или меньшая степень чувствительности и активности, все монады находятся в «предустановленной гармонии», а высшей формой монад является душа человека.

В механике Лейбниц ввел понятие «живой силы» (mv^2 , т. е. удвоенной кинетической энергии) и высказал закон сохранения «живых сил». Он ввел

также понятие «действия» vds, или v^2dt (с коэффициентом массы m или без него), и высказал в одном из писем, но не опубликовал и не обосновал принцип наименьшего действия в виде $\int mvds = extr$.

С 1682 г. в Лейпциге начал издаваться основанный Лейбницем журнал «*Acta Eruditorum*» («Труды ученых») – один из первых научных журналов, в нем Лейбниц публикует свои многочисленные статьи по математике. В 1700 г. Лейбниц занимается созданием Научного общества (будущей академии наук) в Берлине и становится его первым президентом. Во время приезда в Германию русского царя Петра I в 1711–1712 гг. Лейбниц встречается с ним и они подолгу беседуют. По поручению Петра I Лейбниц разрабатывает проект Академии наук для России. Подготовленные Лейбницем документы по этому проекту составляют том в 369 страниц, они составили основу для организации Петербургской академии наук.

При жизни Лейбниц удостаивается всеевропейской славы. Но последние полтора десятка лет жизни Лейбница омрачены рядом обстоятельств: спором школ Ньютона и Лейбница о приоритете в изобретении основ исчисления бесконечно малых, осложнением отношений с новым ганноверским правителем, а также болезнью. Хроника («Анналы») имперского дома Брауншвейгского княжества, которую по долгу службы обязан был писать Лейбниц, продвигалась медленно, превращаясь по существу в историю начального периода всей Священной Римской империи. Постоянное запаздывание работы послужило основной причиной того, что Лейбниц впал в немилость при дворе. Этой немилостью объясняется и то, что смерть Лейбница в 1716 г. прошла незаметно, похоронен он был с минимумом приличий. И только Парижская академия наук в следующем году почтила его похвальным словом.

Уже с юношеских лет Лейбниц стремился к созданию универсального математического языка, в котором каждому понятию науки был бы поставлен во взаимно однозначное соответствие его знак – «характер» (*греч.* – признак, *итал.* carattere – буква). Его предшественник в этом вопросе, математик И. Юнг (1587–1657), сделал попытку построить логику как математическое исчисление.

Замысел Лейбница о «всеобщей характеристике» привел его позже к созданию элементов символической логики (логика классов и исчисление высказываний в алгебраической форме). В математике Лейбниц стремился получать не столько отдельные результаты, сколько общие методы, выделить основные понятия, ввести удобную символику. «Следует заботиться, – писал он в 1678 г., – о том, чтобы знаки были удобны для открытий. Это достигается в наибольшей мере тогда, когда знаки коротко выражают и как бы отображают внутреннюю природу вещи, и при этом удивительным образом сокращается работа мышления». Эта установка привела его, независимо от Ньютона, к созданию основ исчисления бесконечно малых, т. е. математического анализа. Лейбниц создал особенно удобную символику для дифференцирования и интегрирования, сохранившуюся до настоящего времени, а также сформулировал правила (алгоритм) действий для этого исчисления и получил ряд важных результатов в его дальнейшей разработке.

В 1673 г., еще не имея символа для дифференциала, Лейбниц самостоятельно получил соотношение, равносильное современному выражению дифференциала площади в полярных координатах $\frac{1}{2}\rho^2 d\varphi = \frac{1}{2}(ydx - xdy)$. Несколько ранее его нашли (как и Лейбниц, в геометрическом виде) Грегори (1668) и Барроу (1670). С помощью этого соотношения Лейбниц находит площади секторов круга, эллипса, гиперболы и циклоиды. Для площади сектора круга он получает выражение вида $z - \int_0^z \frac{z^2 dz}{1+z^2}$ (знак $\int$ Лейбниц тогда еще не ввел, интеграл понимается как площадь). Разлагая функцию $\frac{1}{1+z^2}$ в степенной ряд и интегрируя, Лейбниц получает ряд $arctgz = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - ...$ (z – действительное). Он не знал о том, что Грегори получил этот ряд несколько ранее – в 1671 г., а индийским математикам этот ряд был известен еще на рубеже XV–XVI вв. Лейбниц

отмечает, что здесь z не должно быть больше единицы, а также первым в Европе рассматривает этот ряд при $z=1$, т. е. $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\dots$, называя этот ряд «арифметической квадратурой круга», поскольку его сумма – это четверть площади круга радиуса $R=1$. Он сообщил об этом Гюйгенсу в 1673 г. Тогда же Лейбниц открыл (пока еще без строгого доказательства) свой признак сходимости знакочередующихся рядов.

Полученные еще в 1672 г. результаты Лейбница о суммировании рядов чисел, обратных к фигурным (в частности, ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$), были найдены ранее английскими математиками. Как видим, первые результаты Лейбница, за исключением признака сходимости знакочередующихся рядов, не были новыми. Но это была только проба сил.

В октябре–ноябре 1675 г., находясь в Париже, Лейбниц создает основные понятия, символику и формулирует правила исчисления бесконечно малых. Сохранившиеся датированные черновики Лейбница позволяют проследить этот процесс создания буквально по дням, откуда видно, что он действовал, не зная результатов Ньютона. Вначале он выражает интеграл словами «все *w*» (*omnia w*), где *w* – ордината, понимая, как и Паскаль, что все ординаты нужно умножать на бесконечно малое приращение абсциссы. А 29 октября он пишет $\int l$, т. е. сумма линий *l*, взяв в качестве знака $\int$ первую несколько видоизмененную букву в слове *Summa*. Он пишет, что если $\int l = ya$ (*a*=const), то $l=\frac{ya}{d}$, отмечая, что операция $\int$ увеличивает размерность, а *d* – уменьшает. Через две недели символы вида $\frac{x}{d}$, $\frac{y}{d}$ он уже заменяет на dx, dy (здесь d – первая буква латинского слова

differentia – разность). В этих записях он с помощью символов d и $\int$ формулирует правила дифференцирования и интегрирования степени, записывает формулы для дифференциала произведения, интеграла суммы функций.

В 1676 г. Лейбниц и Ньютон дважды обменялись письмами (через Ольденбурга). О содержании писем Ньютона говорилось выше в очерке о Ньютоне. Лейбниц в первом письме сообщает о том, что нашел степенные ряды для $arctgx$, $\frac{\pi}{4}$, e^x, $\sin x$, $\cos x$. Во втором – о том, что умеет решать задачи на обратный метод касательных, т. е. интегрировать некоторые дифференциальные уравнения. Ньютон, получивший свои результаты по основам анализа десятью годами раньше, не увидел для себя ничего нового в сообщениях Лейбница. Во втором письме Ньютон принял меры по обеспечению своего приоритета, сообщив о своих главных двух результатах в зашифрованном виде, и пожелал закончить переписку, ссылаясь на занятость другими вещами. Все же Лейбниц дважды еще писал Ньютону в 1677 г., излагая с помощью своей символики правила дифференцирования и приводя примеры на отыскание касательных и вычисление площадей, но Ньютон не отвечал. Немецкий математик Э. Чирнгауз (1651–1708), которому Лейбниц сообщил свои результаты по основам анализа, хотя и не одобрил введенные Лейбницем символы d и $\int$, однако включил без указания источника и в неточном виде некоторые из результатов Лейбница в свои статьи в 1682–1683 гг. Это побудило Лейбница к скорейшему опубликованию своих результатов по анализу бесконечно малых.

В 1684 г. Лейбниц опубликовал в *Acta Eruditorum* свою знаменитую статью «Новый метод максимумов и минимумов, а также касательных, для которых не служат препятствием ни дробные, ни иррациональные величины, и особый для этого род исчисления». Эта работа объемом в 7 страниц представляет собой по существу краткий конспект по дифференциальному исчислению без доказательств. Исходным понятием у Лейбница является

дифференциал переменной, который он обозначает буквой d. За дифференциал абсциссы (независимой переменной) Лейбниц принимает произвольный отрезок dx. Ординаты (функции) он обозначает различными буквами: v, w, y, z. Дифференциал dv ординаты v Лейбниц определяет из пропорции $\frac{dv}{dx}=\frac{v}{t}$, где t – подкасательная, исходя из подобия бесконечно малого треугольника с катетами dx, dv треугольнику с катетами t, v. Таким образом, $dv=\frac{v}{t}dx$ есть приращение ординаты касательной. Далее идет перечисление правил дифференцирования: если a – постоянная, то $da=0$, $d(ax)=adx$; $d(z-y+w+x)=dz-dy+dw+dx$; $d(xv)=xdv+vdx$; дифференциал частного $\frac{v}{y}$. Тут же отмечается инвариантность формы первого дифференциала: «Заметим, что в этом исчислении с x и dx обращаются так же, как с y и dy или с какой-нибудь иной неопределенной буквой или ее дифференциалом». В терминах дифференциалов сформулированы: признак возрастания ($dv>0$) и убывания ($dv<0$) ординаты v; необходимое условие экстремума ($dv=0$), точки перегиба ($ddv=0$); указаны условия выпуклости и вогнутости. Это дает и достаточные условия экстремума. Упоминается случай, когда dv бесконечно относительно dx, тогда касательная перпендикулярна к оси абсцисс. Приводятся примеры дифференцирования степени x^a и корня $\sqrt[b]{x^a}$. В качестве примера на экстремум Лейбниц решает задачу об отыскании закона преломления света на границе двух сред, исходя из принципа Ферма о кратчайшем времени распространения света. Приводится также пример решения дифференциального уравнения (Лейбниц в рассматриваемой статье вводит и термины «дифференциальное исчисление», «дифференциальное уравнение».) До этого говорили не о дифференциальных уравнениях, а об обратных задачах на касательные. Такие задачи впервые поставил Декарту французский

математик Ф. де Бон. Требовалось найти кривую, подкасательная к которой обладает указанным свойством. Эти задачи соответствовали интегрированию дифференциального уравнения вида $f(x, y, y') = 0$. Лейбниц решает задачу отыскания кривой, подкасательная к которой есть постоянный отрезок, и находит, что искомая кривая является «логарифмической кривой». Заметим, что Ньютона и Лейбница от их предшественников в дифференциальном исчислении отличает введение и систематическое использование понятия дифференциала как приращения ординаты касательной (у Ньютона дифференциалы называются моментами). Это позволило дать правило дифференцирования иррациональностей (без предварительного освобождения от них), а также, как пишет Лейбниц, распространить дифференциальный метод «и на трансцендентные линии, которые не могут быть сведены к Алгебраическому исчислению», чего не умели делать Ферма и Декарт. Лейбницу принадлежит и сам термин «трансцендентные» кривые и заслуга их широкого введения в математику. Декарт называл такие кривые механическими и исключал их из математики, поскольку они не могли быть исследованы алгебраическими методами. Заметим, что, в отличие от Ньютона, который вводит понятия и обозначения как производной (флюксии), так и дифференциала (момента), Лейбниц имеет дело обычно с дифференциалами, т. к. не вводит явно понятия производной. Однако, как, например, в статье «Дополнение практической геометрии, распространяющееся на трансцендентные проблемы с помощью нового наиболее общего метода бесконечных рядов» (1693), Лейбниц вычисляет и производные в виде $\frac{dy}{dx}$ или $\frac{dx}{dy}$, дифференцируя ряды с неопределенными коэффициентами для логарифмической и показательной функций и получает разложения этих функций в степенные ряды по методу неопределенных коэффициентов.

В 1686 г., через два года после опубликования основной статьи по дифференциальному исчислению, Лейбниц публикует в *Acta Eruditorum*

статью «О глубоко скрытой геометрии и анализе неделимых, а также бесконечных». Здесь впервые в печати появился введенный Лейбницем в рукописях еще в 1675 г. знак $\int$. Вместо слов «интеграл», «интегрирование» Лейбниц долго пользовался терминами «сумма», «суммирование». Термин «интеграл» предложил швейцарский математик Иоганн Бернулли, а в печати этот термин впервые употребил его старший брат Якоб Бернулли в 1690 г. Обозначая абсциссу через y, ординату через x и поднормаль через p, Лейбниц из подобия бесконечно малого треугольника с катетами dx, dy треугольнику с катетами p и x получает, что $pdy = xdx$. Далее он пишет: «Если обратить дифференциальное уравнение в суммирующее, то будет $\int pdy = \int xdx$. Но из того, что я изложил в методе касательных, вытекает, что $d\frac{1}{2}xx = xdx$; следовательно, и обратно, $\frac{1}{2}xx = \int xdx$ (у нас суммы и разности или $\int$ и d так же взаимно обратны, как степени и корни в обыкновенном исчислении)». Лейбниц приводит также уравнение циклоиды в виде $y = \sqrt{2x - xx} + \int dx : \sqrt{2x - xx}$ (он не мог записать здесь интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{2x - x^2}}$, например, в виде $\arcsin(x-1)$, т. к. обозначений для обратных тригонометрических функций в то время еще не было). При этом он отмечает, что его исчисление «распространяется таким образом и на линии, которые до сих пор были исключены», т. е. на трансцендентные кривые. В конце статьи Лейбниц предостерегает от отбрасывания dx под знаком интеграла, указывая, по существу, что $\int ydx$ инвариантен относительно выбора переменной интегрирования. По его словам, если сохранить за dx «надлежащую универсальность», считая, что переменная x может не только возрастать равномерно (т. е. быть независимой), но и принимать «какой

угодно» род значений (т. е. быть зависимой), то «из одного этого вытекают бесчисленные равносильные преобразования фигур». В этой работе Лейбниц еще не вводит постоянной интегрирования. Впервые она появляется у него в статье «Подходящее построение задачи о парацентрической изохронной кривой» (1694). Интегрируя дифференциальное уравнение $\frac{dt}{\sqrt{at}} = \frac{adz}{\sqrt{a^3z - az^3}}$ искомой кривой, Лейбниц получает равенство $2\sqrt{at} = a^2\int\frac{dz}{\sqrt{a^3z - az^3}} + b$, «где b есть произвольно взятая постоянная величина». Тут же он отмечает, что «это важно для общности решений», а также что «задаче удовлетворяют бесчисленные кривые, которые могут изменяться при изменении отрезка b, причем (насколько могу судить) можно найти такую искомую кривую, которая проходит через заданную точку». Таким образом, Лейбниц здесь имеет дело уже с неопределенным интегралом, а не только с первообразной. Ньютон вводит постоянную интегрирования в работе «Рассуждение о квадратуре кривых», написанной в 1691–1692 гг. и опубликованной в 1704 г.

В работе «Дополнение измерительной геометрии ...» (1693) Лейбниц пишет, что «общая проблема квадратур сводится к отысканию линии, имеющей данный закон наклона». Здесь он геометрически устанавливает связь между интегралом как переменной площадью и тангенсом угла наклона касательной к кривой, т. е. производной, и доказывает правило вычисления определенного интеграла через приращение («разность ординат») первообразной (формула Ньютона–Лейбница). При этом рисунки, которыми пользуются в этом вопросе Лейбниц и Барроу, отличаются по существу лишь направлением оси ординат, но Лейбниц использует уже новую символику: d и $\int$. Утверждение Лейбница можно передать следующим образом. У него здесь y – абсцисса, x – ордината первообразной, $dx = zdy$; $x = \int zdy$ – переменная площадь фигуры под кривой, а приращение этой площади равно разности ординат x первообразной («квадрирующей линии», по выражению

Лейбница). Отсутствие в то время современного обозначения для функции и определенного интеграла не позволяло Лейбницу записать указанный результат в виде: если $z = f(y)$, где $f(y) = \frac{dx(y)}{dy}$, то $\int_a^b f(y)dy = x(b) - x(a)$. Почти в современном виде формула Ньютона–Лейбница впервые появилась в «Трактате по дифференциальному и интегральному исчислению» (1798) профессора Политехнической школы в Париже **С. Ф. Лакруа (1765–1843)**. В рассматриваемой статье Лейбниц предложил также описание изобретенного им интегрирующего механизма, который по графику данной функции позволял вычерчивать график ее первообразной.

Лейбницу принадлежит заслуга введения термина «функция». Это слово впервые встречается у него в рукописи от 1673 г. и происходит от латинского глагола *fungi*, который означает выполнять (обязанность), осуществлять, выражать и т. п. В печати термин «функция» Лейбниц впервые употребил мимоходом в одной статье в 1692 г., в которой ввел также термины: постоянная, переменная, параметр. В статье в 1694 г. он называет функциями всякие отрезки прямых, связанные с заданной точкой кривой, а именно: абсциссу, ординату, хорду, касательную, нормаль, подкасательную, поднормаль и др. В переписке Лейбница и Иоганна Бернулли 1696–1698 гг. слово «функция» понимается уже как выражение («количество»), составленное каким угодно способом из переменных и постоянных. Ньютон не пользуется термином «функция», он называет аналитические выражения словом «ордината». О дальнейшем развитии понятия функции см. [135; 137, гл. II; 3, с. 74–85].

В 1692 г. Лейбниц ввел понятие огибающей однопараметрического семейства кривых и указал правило ее нахождения с помощью дифференцирования по параметру. В 1695 г. он осуществил логарифмическое дифференцирование функции u^v, а также открыл формулу $d^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k}u d^k v$, хотя опубликовал ее лишь через 15 лет. Используя аналогию с биномиальным рядом,

Лейбниц распространил эту формулу на отрицательные и дробные n, при этом под d^{-n}, где $n \in \mathbb{N}$, он понимает повторный интеграл, который обозначает $\int^n$. По этому поводу он писал в письме к Лопиталю в 1695 г.: «Из этих парадоксов, по-видимому, когда-либо извлекут весьма полезные следствия, ибо бесполезных парадоксов не существует». Позже вопросами дифференцирования с отрицательными и дробными n занимались многие крупные математики: в XVIII в. – Эйлер, в XIX в. – Лиувилль, Риман и др., в XX в. – Г. Вейль, М. Рис.

В 1702–1703 гг. в двух работах Лейбниц показал, как интегрировать рациональные функции, приведя готовые формулы их разложения на простые дроби как в случае различных, так и кратных корней знаменателя рациональной функции. Однако он не смог разложить двучлен вида $x^4 + a^4$ на действительные квадратичные множители $x^2 \pm a\sqrt{2}x + a^2$ и ошибочно считал, что интегралы вида $\int \frac{dx}{x^{2n} + a^{2n}}$ представляют собой новые трансцендентные функции. Полностью рассмотрел этот вопрос И. Бернулли.

В 90-х гг. XVII в. в недрах математического анализа начала складываться новая математическая дисциплина – дифференциальные уравнения. Уже Лейбниц умел решать дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными. Он умел сводить к ним также однородные уравнения $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$ с помощью подстановки $y = xt$. В 1695 г. он привел линейное дифференциальное уравнение первого порядка $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)$ к уравнению с разделяющимися переменными, полагая $y = uv$. В том же году Я. Бернулли предложил задачу об интегрировании уравнения $\frac{dy}{dx} = p(x)y + q(x)y^n$ (сейчас оно носит его имя). В следующем году, кроме него, это уравнение решили Лейбниц и И. Бернулли.

В одном из писем Лейбница от 1713 г. приведено определение сходящегося ряда как такого, «который можно настолько продолжить, чтобы он отличался от какой-либо возможной конечной величины на величину, меньше заданной». Лейбниц установил свой признак сходимости знакочередующихся рядов и сообщил его с доказательством и оценкой частичных сумм ряда в письме к И. Бернулли в 1714 г. Термин «сходящаяся» в применении к последовательности впервые ввел Грегори в 1667 г. Вместо слов «ряд сходится» Лейбниц говорит, что ряд имеет конечное значение. О Лейбнице: [87; 88; 73; 74; 61; 78; 1, т. 2; 79; 69; 3–5].

Якоб и Иоганн Бернулли

В 90-х гг. XVII в. на континенте сложилась математическая школа Лейбница, в которую, кроме него, входили швейцарские математики – братья Якоб и Иоганн Бернулли, а также французский математик Г. Ф. Лопиталь. С ними Лейбниц вел оживленную переписку, предлагая им свои задачи и решая поставленные ими. Швейцарская семья Бернулли из Базеля была уникальным явлением в истории науки. Из одиннадцати ее представителей, заведовавших в разное время университетскими кафедрами, восемь были математиками. В течение почти ста лет кафедра математики Базельского университета была «фамильной» кафедрой Бернулли. Из этой династии математиков было три выдающихся: Якоб Бернулли, его младший брат Иоганн и сын Иоганна Даниил.

Якоб Бернулли (1654–1705) окончил богословский факультет Базельского университета. С 1676 г. в течение четырех лет путешествовал по Швейцарии, Франции и Италии, а в 1682 г. – по Нидерландам и Англии. Он вернулся в Базель уже признанным ученым и с 1687 г. занимал кафедру математики в университете этого города. В этом же году Якоб и его брат Иоганн первыми начали изучать статью Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов», содержащую основы дифференциального исчисления. Они самостоятельно разобрались в ней, хотя это было не просто, т. к. статья

не содержала доказательств. А вскоре они начинают применять анализ бесконечно малых к решению задач. Первым из таких результатов явилось решение Я. Бернулли задачи об изохроне (кривой равных спусков), опубликованное им в *Acta Eruditorum* в 1690 г. Здесь требовалось найти кривую, по которой материальная точка опускается в равные промежутки времени на равные высоты. Этой кривой оказалась полукубическая парабола. Я. Бернулли получил для этой кривой дифференциальное уравнение $\sqrt{b^2 y - a^3}\, dy = \sqrt{a^3}\, dx$ и проинтегрировал его. При этом впервые в печати появился предложенный И. Бернулли термин «интеграл». Ранее задачу об изохроне решили, но не дифференциальными методами, а геометрически – Лейбниц, предложивший ее, и Гюйгенс.

В этой же работе Я. Бернулли решил задачу о форме кривой, по которой располагалась под действием собственного веса однородная гибкая нить, подвешенная за оба конца. Ею оказалась цепная линия. Кроме Я. Бернулли, эту задачу решили дифференциальными методами Лейбниц и И. Бернулли, а геометрически – Гюйгенс, которому принадлежит и сам термин «цепная линия». Для нее Лейбниц заодно выполнил построение касательной, спрямление, нашел центр тяжести, а также объем и поверхность ее тела вращения.

В 1691–1692 гг. Я. Бернулли занимался изучением свойств некоторых кривых, изучил многие свойства введенной им в полярных координатах параболической спирали $(\rho - a)^2 = 2ap\varphi$, а также логарифмической спирали (ее полярное уравнение $\rho = e^{a\varphi}$). Ряд математиков XVII в., в частности Якоб и Иоганн Бернулли, изучали кривые, называемые каустиками отражения или преломления. Каустиками данной плоской кривой называются огибающие семейства прямых, полученных отражением (преломлением) от данной кривой пучка лучей, выходящих из данной точки или параллельных. При этом считается, что угол преломления (отражения) равен углу падения. Я. Бернулли нашел, что и эволюта, и каустика логарифмической спирали также являются логарифмическими спиралями.

На его могильной плите, по завещанию, изображена логарифмическая спираль (впрочем, неточно) с надписью: «Измененная, я возрождаюсь прежней». Я. Бернулли нашел для кривых формулу радиуса кривизны в виде $R = \frac{ds^3}{dyddx}$. Он одним из первых начал вычислять эллиптические интегралы, например $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^4}}$, разлагая их в ряды. В 1697 г. Я. Бернулли привел оригинальное решение задачи о брахистохроне (кривой скорейшего спуска материальной точки), поставленной и решенной И. Бернулли [90, с. 61–63]. После изометрических задач это была одна из первых задач вариационного исчисления.

В 1689–1704 гг. Я. Бернулли написал 5 работ, посвященных рядам. Здесь рассматриваются вопросы о суммировании некоторых рядов, применении рядов к квадратурам и спрямлению кривых. Заметим, что он оперирует с рядами формально, используя и расходящиеся, поэтому некоторые его результаты являются ошибочными.

В результате 20-летних размышлений над вопросами теории вероятностей Я. Бернулли в последние годы жизни написал знаменитую книгу «Искусство предположений», опубликованную в 1713 г., через 8 лет после его смерти. Главным ее результатом является закон больших чисел в форме Бернулли, который в современной формулировке утверждает, что если в последовательности независимых испытаний вероятность p наступления события постоянна, то частота $\frac{m}{n}$ наступления этого события сколь угодно мало отличается от p при достаточно большом числе испытаний n. (Сам Я. Бернулли формулировал этот закон в менее совершенном виде – без использования термина «вероятность» и в неявном предположении, что события независимы [3, с. 211].) Доказательство своего закона больших чисел Бернулли основывает на своей схеме испытаний, а именно на

биномиальном распределении вероятностей $P_n(k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, где $P_n(k)$ – вероятность появления события ровно k раз в серии из n независимых испытаний, p – вероятность появления события в каждом испытании. Позже закон больших чисел обобщили Пуассон (1837) и Чебышёв (1867) [3, с. 208–217; 90, с. 69–81; 13, с. 96–97].

Заметим, что результаты в математике, которые носят имя Бернулли, принадлежат Якобу Бернулли: схема испытаний и закон больших чисел в форме Бернулли, лемниската, числа Бернулли, дифференциальное уравнение Бернулли, неравенство $(1+x)^n \geq 1+nx \quad (x > -1,\ n \in \mathbb{N})$. Это неравенство встречается уже в «Геометрических лекциях» Барроу, но Я. Бернулли доказывает его методом математической индукции, который он переоткрыл. Последние годы жизни Якоба были омрачены болезнью (туберкулёзом) и навязанными ему младшим братом Иоганном спорами о приоритете в разработке ряда математических вопросов.

Большой вклад в развитие математического анализа внес **Иоганн Бернулли (1667–1748)**. Он был десятым ребенком в семье, моложе Якоба на 13 лет. После окончания университета защитил диссертацию на степень бакалавра, написанную латинскими стихами, а затем – диссертацию на степень магистра искусств, написанную греческими стихами. По совету Якоба Иоганн стал заниматься математикой и медициной, при этом математику он усваивает с поразительной легкостью: за два года одолел все известные в то время труды знаменитых математиков. Как уже отмечалось, в 1687 г. братья Бернулли разобрались в статье Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов», восстановив отсутствующие в ней доказательства. В 1690 г. Иоганн защитил и диссертацию по медицине на степень лиценциата, а затем отправился на два года в путешествие в Женеву и Париж. Из французских математиков в то время пользовался известностью маркиз Г. Ф. Лопиталь (1661–1704). По его просьбе И. Бернулли написал и прочел ему курс лекций по анализу бесконечно малых. В 1696 г. Лопиталь издал

учебник «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий», написанный на основе лекций И. Бернулли по дифференциальному исчислению. Произошел уникальный случай в истории науки: первый же курс лекций по новой дисциплине, прочитанный одному слушателю, сразу же превратился в учебник! О его содержании мы будем подробнее говорить ниже в очерке о Лопитале. Курс «Лекций об исчислении дифференциалов» И. Бернулли, послуживший основой для этой книги, был обнаружен лишь в 1920 г. в отделе рукописей Базельского университета и опубликован в 1922 г. через 230 лет после его написания. А лекции по интегральному исчислению, написанные для маркиза Лопиталя в 1691–1692 гг., И. Бернулли опубликовал в 1742 г. Заметим, что автор первого систематического курса лекций по математическому анализу И. Бернулли написал его в возрасте 24–25 лет.

В 1692 г. И. Бернулли вернулся в Базель и защитил докторскую диссертацию по медицине на тему «О движении мускулов». В Базеле он не смог устроиться на подходящую работу, поэтому принимает приглашение университета небольшого города Гронингена в Голландии. Там он провел 10 лет, и благодаря ему университет Гронингена выдвинулся на одно из первых мест в Европе. С 1705 г., после смерти Якоба, Иоганн занимает кафедру математики в Базельском университете. Он ведет очень интенсивную научную и административную работу, его избирают восемь раз деканом и два раза ректором университета. Переписка И. Бернулли с Лейбницем составляет два тома. Лекции Иоганна слушал будущий великий математик Л. Эйлер, с которым, кроме того, Иоганн занимался по субботам отдельно.

Первая статья И. Бернулли появилась в 1691 г. в *Acta Eruditorum*, она посвящена задаче о цепной линии, приведено 13 ее свойств и способ построения. Решение задачи об изохроне И. Бернулли привел в своих лекциях по интегральному исчислению. Он считается одним из основоположников вариационного исчисления, т. к. впервые поставил и решил в 1696 г. с помощью дифференциалов знаменитую задачу о брахистохроне (кривой скорейшего спуска), в которой требовалось найти кривую, соединяющую две



Галилео Галилей



Джон Непер



Иоганн Кеплер

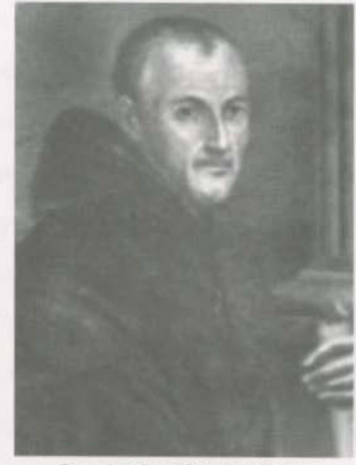


Бонавентура Кавальери


Эванджелиста Торричелли


Рене Декарт


Пьер Ферма


Григорий из Сен-Винцента


Блез Паскаль


Роберваль (Жиль Персонн)

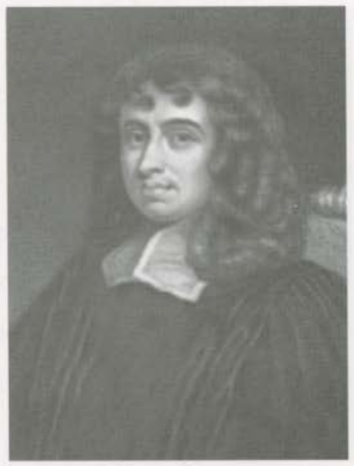

Христиан Гюйгенс


Жирар Дезарг


Джон Валлис


Уильям Броункер


Джеймс Грегори


Исаак Барроу


Исаак Ньютон


Готфрид Вильгельм Лейбниц


Якоб Бернулли


Иоганн Бернулли


Гийом Франсуа де Лопиталь


Мишель Ролль

точки, не лежащие на одной вертикали, по которой материальная точка скатывается за наименьшее время. Ею оказалась циклоида. Не раскрывая своего решения, Иоганн бросил вызов всем «тончайшим, славящимся в мире математикам», приглашая решить эту задачу. Ее постановку он опубликовал сначала в *Acta Eruditorum*, а затем в специальной обширной «Программе». Срок давался в полгода, а затем был продолжен еще на три месяца. К назначенному сроку ее решили: Лейбниц, Ньютон, Я. Бернулли и Лопиталь. Ньютон опубликовал свое решение анонимно, но Иоганн по красоте этого решения узнал автора, «как по когтям узнают льва». Эта задача и ее оригинальное решение И. Бернулли приведены в [90, с. 91–99].

Укажем еще на ряд достижений И. Бернулли в области математического анализа и дифференциальных уравнений. Ему принадлежит известное правило раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ («правило Лопиталя»), которое он сообщил Лопиталю, включившему это правило в свой учебник. Независимо от Лейбница Иоганн логарифмически продифференцировал степенно-показательную функцию u^v. Кроме того, Иоганн нашел интересное разложение

$$\int_0^1 x^x dx = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^4} + \dots .$$

Лейбниц и И. Бернулли независимо получили аналог формулы Тейлора в виде

$$\int_0^z n(z)dz = zn(z) - \frac{z^2}{1\cdot 2}\frac{dn}{dz}(z) + \frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^2n}{dz^2}(z) - \dots .$$

И. Бернулли опубликовал его в 1694 г., а Лейбниц нашел несколько ранее, но не публиковал. Это тождество проверялось дифференцированием по z. И. Бернулли полностью рассмотрел вопрос об интегрировании рациональных функций. В 1702 г. он привел метод неопределенных коэффициентов для разложения рациональной функции на простые дроби и указал, что рациональные функции интегрируются в рациональных, логарифмических и круговых функциях.

В работе 1718 г. об изопериметрических задачах И. Бернулли привел определение функции в виде: «Функцией переменной величины здесь называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных». Через 30 лет Эйлер привел аналогичное определение, в котором слово «количество» из предыдущего определения было заменено на «аналитическое выражение». Заметим, что математики XVII–XVIII вв. имели дело только с аналитическими функциями.

И. Бернулли принадлежат основные результаты в исследовании каустик, т. е. огибающих семейства лучей, отраженных (преломленных) от заданной кривой. В 1697 г. он поставил задачу об изогональных траекториях, т. е. кривых, пересекающих однопараметрическое семейство кривых под заданным углом, а в следующем году свел эту задачу к дифференциальному уравнению первого порядка. Этот же результат был получен и Лейбницем в процессе переписки с И. Бернулли. У Иоганна впервые встречается интегрирующий множитель, в частности множитель x^p для понижения порядка так называемого уравнения Эйлера

$$Ax^n \frac{d^n y}{dx^n} + Bx^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + Qx \frac{dy}{dx} + Ry = 0 .$$

В 1694 г. И. Бернулли опубликовал статью «Общий способ построения всех дифференциальных уравнений первого порядка». Здесь впервые встречается термин «порядок уравнения». К тому времени стало ясным, что дифференциальные уравнения сводятся к квадратурам лишь в отдельных случаях. Поэтому И. Бернулли в указанной статье приводит метод изоклин для графического построения решений дифференциальных уравнений первого порядка $f(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$ (он называл изоклины директрисами, а термин «изоклина» был введен лишь в конце XIX в.). Пример И. Бернулли построения изоклин для уравнения $x^2 dx + y^2 dx = a^2 dy$ и сейчас входит в некоторые учебники дифференциальных уравнений, например в учебник,

указанный в [155]. В том же году И. Бернулли проинтегрировал уравнение $y = x\varphi(\frac{dy}{dx}) + \psi(\frac{dy}{dx})$, которое в настоящее время называют уравнением Лагранжа. Таким образом, в последнее десятилетие XVII в., менее чем за 10 лет, математиками школы Лейбница были проинтегрированы в квадратурах почти все типы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, допускающих такое интегрирование.

В 1697 г. И. Бернулли опубликовал постановку задачи о геодезических: найти кратчайшую линию между двумя точками на выпуклой поверхности. Он свел эту задачу к дифференциальному уравнению, которое пока не умел решить. А в следующем году он нашел основное свойство геодезических: в любой точке геодезической соприкасающаяся плоскость перпендикулярна касательной плоскости к поверхности в той же точке. В 1715 г. И. Бернулли ввел понятия координат в пространстве и уравнения поверхности. Задачу о геодезических решил Эйлер в 1728 г., а в 1742 г. И. Бернулли опубликовал свои результаты по геодезическим. К первым десятилетиям XVIII в. относятся и исследования И. Бернулли по гидродинамике, изложенные им в книге «Гидравлика, впервые открытая и доказанная на чисто механических основаниях» (1743).

Биографы И. Бернулли отмечают его трудный характер. С 1694 г. в течение нескольких лет он вел резкий спор со своим братом Якобом о приоритете в разработке анализа бесконечно малых. Работы Иоганна отличались изяществом и простотой, поэтому он считал, что Якоб уступает ему в математике. За внешней громоздкостью работ Якоба Иоганн не видел их большой глубины. Впрочем, соперничество братьев Бернулли лишь способствовало развитию математики. В последние годы жизни Иоганн вступил в резкий конфликт со своим сыном Даниилом по вопросу о приоритете в открытии ими законов гидродинамики.

О математиках Бернулли: [90; 73; 74; 78; 91; 61; 1, т. 2].

Лопиталь

В конце XVII в. пользовался влиянием и известностью французский математик маркиз **Гийом Франсуа де Лопиталь (de L'Hospital, 1661–1704)**. В молодости он был на военной службе, но вскоре ушел в отставку из-за сильной близорукости и всецело отдался занятиям математикой, самостоятельно изучая работы Декарта, Ферма, Паскаля и др. и принимая участие в парижском кружке ученых. Ознакомившись с работой Лейбница «Новый метод максимумов и минимумов», он не смог глубоко проникнуть в ее содержание и попросил И. Бернулли, приехавшего в 1692 г. в Париж, написать для него и прочитать ему лекции по исчислению бесконечно малых. В результате четырехмесячных занятий с И. Бернулли в своем имении Лопиталь основательно овладел новым исчислением. С 1692 г. Лопиталь ведет переписку с Лейбницем и И. Бернулли, успешно принимает участие в решении трудных задач (о брахистохроне и др.) и становится одним из лучших знатоков нового исчисления, однако его собственные результаты являются весьма скромными.

Подлинную славу Лопиталю принесла его книга «Анализ бесконечно малых для изучения кривых линий», написанная на основе лекций И. Бернулли по дифференциальному исчислению и изданная сначала анонимно в 1696 г. Ей суждено было в течение ближайших 50 лет сыграть роль первого учебника по дифференциальному исчислению. Отличаясь хорошими педагогическими достоинствами, она выдержала несколько изданий на французском языке, а также в переводе на английский – в Лондоне и на латинский – в Вене. Отметим, что она издана и в переводе на русский язык в 1935 г. со вступительной статьей и комментариями А. П. Юшкевича [89]. Право распоряжаться лекциями И. Бернулли было приобретено Лопиталем, который выплачивал Иоганну ежегодный значительный гонорар до выхода в свет книги. В предисловии Лопиталь писал: «Я многим обязан знаниям гг. Бернулли, особенно младшего из них, состоящего в настоящее время профессором в Гронингене. Я без всякого стеснения пользовался их открытиями и открытиями г. Лейбница.

Поэтому я не имею ничего против того, чтобы они предъявили свои авторские права на все, что им угодно, сам довольствуясь тем, что они соблаговолят мне оставить». В письме Лопиталю И. Бернулли хвалит мастерство изложения материала Лопиталем, а Лейбницу пишет: «Не более справедливо он поступил со мною, когда недавно выпустил свой «Анализ». Правда, он признает в предисловии, что многим мне обязан, но это признание чересчур неопределенно… Главная заслуга его состоит в том, что он все привел в порядок и отделал по-французски аккуратно то, что я беспорядочно изложил ему частью по-французски, частью по-латыни. Как я сказал, собственно своего он добавил не более, чем на 3 или 4 страницы» [89, с. 45].

Книга Лопиталя состоит из 10 глав. Введение содержит краткую историю создания дифференциального исчисления. В главе I сначала приводятся определения постоянной и переменной величин, а также дифференциала: «Бесконечно малая часть, на которую непрерывно увеличивается или уменьшается переменная величина, называется ее дифференциалом». Как уже отмечалось, в определении Лейбница дифференциал означает приращение ординаты касательной к кривой. Лопиталь отождествляет дифференциал переменной с ее приращением, хотя ниже мы увидим и дифференциал в смысле приращения ординаты касательной к кривой. Далее формулируются требования (допущения) [89, с. 63]:

I. «Требуется, чтобы две величины, отличающиеся друг от друга лишь на бесконечно малую величину, можно было брать безразлично одну вместо другой…»

II. «Требуется, чтобы можно было рассматривать кривую линию как совокупность бесконечного множества бесконечно малых прямых линий…»

Требование I представляет принцип отбрасывания бесконечно малых, на которые отличаются рассматриваемые величины. Оно позволяет, например, отождествлять приращение функции с приращением ординаты касательной в данной точке, что характерно для математиков XVII – XVIII вв. Далее выводятся правила нахождения дифференциалов суммы, произведения

и частного, а также степени $x^{\frac{m}{n}}$, где $\frac{m}{n}$ – рациональное число. Понятие производной не вводится. В главе II сначала дается следующее определение касательной: «Если продолжить одну из маленьких сторон *Mm* (черт. 2) многоугольника, составляющего (§ 3) кривую линию, то эта продолженная таким образом сторона будет называться касательной к кривой в точке *M* или *m*». Однако связь между dx, dy, ординатой y и подкасательной PT кривой записывается уже в привычном для нас виде $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{PT}$ (из подобия характеристического треугольника с катетами dx, dy треугольнику с катетами y и PT).Таким образом, здесь $dy=\frac{y}{PT}dx$ является приращением ординаты касательной. Далее с помощью дифференциалов излагается ряд общих методов построения касательных и нормалей к кривым, сопровождаемых конкретными примерами. В главе III речь идет о нахождении максимумов и минимумов с помощью первого дифференциала, изложение иллюстрируется рядом примеров в основном геометрического содержания. Заметим, что Лопиталь пользуется дифференцированием лишь алгебраических функций и соотношений, а трансцендентные функции сводит к алгебраическим, искусно используя подходящие криволинейные (в частности, полярные) координаты. В главе IV даются определения дифференциалов высших порядков, а затем вторые дифференциалы используются для нахождения точек перегиба кривых и точек возврата первого рода (в таких точках возврата кривая располагается по разные стороны от касательной). В главе V выводятся формулы для радиуса кривизны кривой в прямоугольных и полярных координатах и изучаются эволюты (развертки) кривой, а в § 109 –эвольвенты (развертывающие). Заметим, что эволюта является огибающей нормалей к кривой, а эвольвента – ортогональной траекторией касательных к кривой. Лопиталь приводит много примеров с решением на нахождение эволют кривых, а эвольвенты строит для кривых типа кубических парабол, имеющих одну точку перегиба. Такие эвольвенты имеют

две особые точки – точки возврата первого и второго рода. Лопиталь пишет, что до него точки возврата второго рода никем не рассматривались (в них кривая расположена по одну сторону от касательной). Теория особых точек в его книге находится еще в начальном состоянии. Следующие две главы, VI и VII, посвящены применению дифференциального исчисления к нахождению каустик отражения и преломления, т. е. огибающих семейства отраженных (преломленных) лучей, исходящих первоначально из одной точки или параллельных. В силу интереса, который представляют эти кривые для оптики, их изучали в конце XVII в. математики Чирнгауз, Гюйгенс, И. Бернулли и Лопиталь. В последние два десятилетия XX века эвольвенты и каустики снова привлекли внимание математиков в связи с возникновением нового раздела математики – теории катастроф, которая имеет дело, в частности, с особенностями отображений (см. книгу В. И. Арнольда [86, § 13–15], а также его книги: «Теория катастроф». – М.: Наука, 1990 и «Теория катастроф». – М.: Знание, 1981). При этом был замечен рисунок эвольвенты с двумя особыми точками, приведенный в книге Лопиталя (черт. 91). Глава VIII посвящена огибающим.

В предложении I (§ 163) главы IX рассматривается знаменитое правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ – так называемое «правило Лопиталя». Рассмотрим, как оно там получается. На приведенном ниже рис. 28 (с обозначениями Лопиталя)

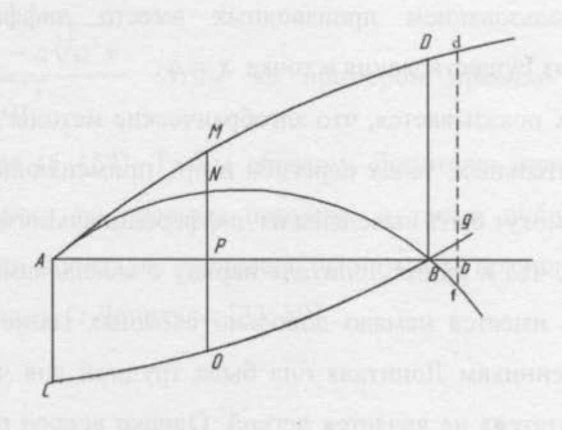


Рис. 28

кривая *AMD* изображает график отношений соответствующих ординат кривых *ANB* и *COB*, поэтому $PM = \frac{PN}{PO}$ (для соблюдения размерности правая часть там умножается еще на постоянный отрезок, который можно заменить единичным).

Лопиталь вместо функций говорит об ординатах, буквы *f* и *g* на рисунке у него обозначают не функции, а точки. Утверждается, что если ординаты кривых *ANB* и *COB* обращаются в нуль в точке *B* (при $x = a$), то отношение *BD* этих ординат в точке *B* равно отношению $\frac{bf}{bg}$ дифференциалов в точке *B* этих ординат. Вместо предельного перехода при $x \to a$ там говорится, что «ордината *bd*, бесконечно близкая к *BD*», совпадает с *BD* (по требованию I, указанному выше). Дифференциалы функций там отождествляются с приращениями *bf*, *bg* функций (по требованию I).

В настоящее время вместо ординат двух кривых мы говорим о двух функциях $\varphi(x)$, $\psi(x)$, а то, что утверждает Лопиталь, можно записать так: если $\varphi(a) = \psi(a) = 0$, то $\lim\limits_{x \to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = \frac{d\varphi(a)}{d\psi(a)}$. Это частный случай правила Лопиталя, которое излагается в современных учебниках математического анализа с использованием производных вместо дифференциалов без предположения их существования в точке $x = a$.

В главе X показывается, что алгебраические методы Декарта и Гудде нахождения касательных, точек перегиба и пр., применяющиеся к алгебраическим кривым, могут быть выведены из дифференциального исчисления.

Отметим, что в книге Лопиталя наряду с выкладками, содержащими дифференциалы, имеется немало довольно сложных геометрических рассуждений. Современникам Лопиталя она была трудной для чтения, да и для современного читателя не является легкой. Однако вскоре после ее издания

круг лиц, освоивших дифференциальное исчисление, существенно расширился. Лопиталю принадлежит также книга «Аналитический трактат о конических сечениях» (1707).

В 1704 г., после смерти Лопиталя, И. Бернулли опубликовал заметку, в которой заявил авторские права на содержание книги Лопиталя «Анализ бесконечно малых» и, в частности, на авторство «правила Лопиталя». При этом он отметил, что иногда после применения этого правила снова получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$, тогда это правило нужно применять повторно. Многие историки математики (и среди них датский историк математики Г. Цейтен, а также немецкий историк математики М. Кантор, автор 4-томных «Лекций по истории математики» до 1800 г., изданных в 1880–1908 гг.) сомневались в обоснованности указанных выше претензий И. Бернулли. Но в 1920 г. была обнаружена рукопись лекций И. Бернулли по дифференциальному исчислению, использованных Лопиталем. А в 1955 г. было опубликовано случайно обнаруженное письмо И. Бернулли Лопиталю от 22.07.1696 г., в котором И. Бернулли формулирует правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ с приведенным выше его выводом в ответ на письмо от 2.09.1693 г. Лопиталя с просьбой помочь ему найти значение при $x = a$ (мы говорим: предел при $x \to a$) выражения $y = \frac{\sqrt{2a^3x - x^4} - a\sqrt[3]{a^2x}}{a - \sqrt[4]{ax^3}}$. Этим же примером правило иллюстрируется в книге Лопиталя (§ 164). Таким образом, Лопиталю принадлежит только постановка вопроса на частном примере, а также публикация правила, поэтому «правило Лопиталя» следовало бы называть правилом Бернулли или Бернулли–Лопиталя. О Лопитале: [73; 89].

Об обосновании исчисления бесконечно малых в XVII веке

Исчисление бесконечно малых уже в XVII в. приобрело как сторонников, так и противников. Огромный авторитет Ньютона сдерживал критику его флюксий еще и в течение 10 лет после его смерти, а дифференциалы Лейбница подверглись нападкам уже в 90-е гг. XVII в. Голландский врач и математик Б. Ньювентийт (1654–1718), бургомистр городка вблизи Амстердама, в своих двух работах в 1694–1695 гг. подверг критике исчисление Лейбница, выступив против принципа отбрасывания бесконечно малых и особенно против высших дифференциалов. Другим противником бесконечно малых Лейбница был известный французский алгебраист **Мишель Ролль (1652–1719)**, имя которого носит одна из основных теорем дифференциального исчисления, против которого он решительно выступал. В своем «Трактате по алгебре» (1690) он, в частности, рассматривает разложение многочлена по степеням приращения аргумента, которое мы записываем в виде

$$f(x+h) = f(x) + f_1(x)h + f_2(x)h^2 + ... + f_n(x)h^n,$$

это можно получить чисто алгебраически. Функции $f(x)$, $f_k(x)$, $k = 1,...,n$, Ролль называет «каскадами» (здесь $f_k(x) = \dfrac{f^{(k)}(x)}{k!}$, но Роллю это неизвестно). Он показывает алгебраически, что между двумя нулями какого-либо «каскада» лежит нуль следующего «каскада». Отсюда вытекает справедливость в частном случае (для многочлена) «теоремы Ролля» из дифференциального исчисления, а в общем случае ее изложил Вейерштрасс в лекции 1861 г. В конце XVII в. и начале XVIII в. жаркие споры относительно законности использования бесконечно малых велись на заседаниях Парижской академии наук и в печати. Главным участникам спора – П. Вариньону (1654–1722) и М. Роллю – Парижская академия наук поручила опубликовать свои мнения. Вариньон опубликовал 6 статей за, а Ролль

5 статей против анализа бесконечно малых. И хотя в 1706 г. Ролль отказался от своих возражений, вопрос обоснования анализа окончательно не был решен, критику в XVIII в. продолжил епископ Беркли, о чем будет сказано в следующем разделе пособия.

Сами Ньютон и Лейбниц уделяли внимание обоснованию своих методов. Ньютон ввел первое, хотя еще и несовершенное понятие предела и сам термин «предел». В «Математических началах натуральной философии» он сперва доказывает 12 лемм о пределах, чтобы обосновать метод исчерпывания и избежать его многократного повторения. Однако у Ньютона еще не было теорем об арифметических и других свойствах предела, а понятие флюксии (производной) как предела отношения исчезающих величин он обосновывает с помощью апелляции к мгновенной скорости [3, с. 101–107].

Вопрос о том, что такое бесконечно малые, или дифференциалы, Лейбниц в разное время трактует по-разному [3, с. 123–127; 88; 190, § 12]. В заметке 1689 г. он приводит точку зрения о том, что бесконечно малые – это несравнимые (неархимедовы) величины, т. е. актуально бесконечно малые: «Я считаю равными величины, разность которых несравнима. Несравнимыми величинами я называю такие, из которых одна никогда не превзойдет другую, на какое конечное число ее бы ни помножили…» Кроме этой, он приводит и другие свои точки зрения по данному вопросу в письме к Вариньону в 1702 г. А именно рассматривает бесконечно малые как потенциально бесконечно малые, т. е. такие, которые можно сделать сколь угодно малыми. А тем, кто не желает принимать бесконечно малые в качестве «действительных вещей», он советует рассматривать бесконечно малые как некие «идеальные понятия», наподобие мнимых чисел, природа которых в то время еще не была ясна, но их полезность была очевидной. В 1702 г. Лейбниц публикует работу «Оправдание исчисления бесконечно малых», где вводит свой «принцип непрерывности» – перенос свойств переменной величины на ее предел: «Если среди данных или принятых явлений различие двух явлений

может стать меньше всякой данной величины, то оно вместе с тем необходимо станет меньше всякой величины и у искомых или последующих, вытекающих из данных».

Формализм Лейбница и его школы, а в XVIII в. – Эйлера в отношении бесконечно малых получил реабилитацию не в обычном (классическом) анализе, а в нестандартном (неархимедовом) анализе, созданном в 60-х гг. XX века американским математиком А. Робинсоном и др. В нем рассматриваются актуально бесконечно малые (бесконечно малые числа) как некоторые элементы, не удовлетворяющие аксиоме Архимеда. Элемент $\varepsilon > 0$ упорядоченного поля называется бесконечно малым, если любая из сумм $\varepsilon + \varepsilon$, $\varepsilon + \varepsilon + \varepsilon$, ... не превосходит единицы. Пополняя множество $\mathbb{R}$ действительных чисел бесконечно малыми и бесконечно большими числами, получают множество $^*\mathbb{R}$ гипердействительных чисел. Обычные действиительные числа в $^*\mathbb{R}$ называются стандартными числами, а остальные числа (бесконечно малые и бесконечно большие) – нестандартными. Каждое конечное гипердействительное число *a* можно представить в виде $b + \varepsilon$, где b – стандартное число, а ε – бесконечно малое. Бесконечно малое число δ имеет более высокий порядок малости, чем бесконечно малое ε, если их отношение $\dfrac{\delta}{\varepsilon}$ бесконечно мало. С неархимедовым анализом можно познакомиться по книгам В. А. Успенского [190; 191].

Краткие итоги развития математики в XVII веке

Завершая рассмотрение истории математического анализа и других математических дисциплин в XVII в., отметим следующее. XVII век ознаменовался невиданно быстрым развитием математики: в это время было получено математических достижений больше, чем за предыдущие пятнадцать веков. В XVII в. появилось целое созвездие крупных ученых, большинство из которых обладало универсальным складом мышления

(в Германии – Кеплер и Лейбниц; в Италии – Галилей, Кавальери, Торричелли; во Франции – Декарт, Ферма, Паскаль, Роберваль, Лопиталь; в Голландии – Гюйгенс; в Шотландии – Непер, Грегори; в Англии – Валлис, Барроу, Ньютон; в Швейцарии – Якоб и Иоганн Бернулли). Освоив античное наследие, они энергично начали разрабатывать математику Нового времени. Отказ от античной строгости и использование инфинитезимальных методов позволили быстро накопить большое число примеров квадратур, кубатур и других результатов, относящихся к интегрированию. Огромное значение имели введение Декартом удобной алгебраической символики и создание Декартом и Ферма в первой половине XVII века основ аналитической геометрии. Метод Ферма нахождения максимумов и минимумов был крупным шагом на пути к дифференциальному исчислению. Ферма заложил основы теории чисел.

В последней трети XVII в. Ньютон и Лейбниц создают основы новой науки – математического анализа (анализа бесконечно малых, или дифференциального и интегрального исчисления) как закономерный итог обобщения достижений их многочисленных предшественников. Это произвело настоящую революцию в математике и механике. Отныне математика переходит к изучению переменных величин, движения, изменения, описывая многообразные процессы с помощью дифференцирования и интегрирования. Научная школа Лейбница делала столь быстрые успехи, что уже в 1696 г. Лопиталь на основе лекций и результатов И. Бернулли издал книгу «Анализ бесконечно малых» – первый печатный курс дифференциального исчисления. Особых успехов достигли Лейбниц, Якоб и Иоганн Бернулли в интегрировании дифференциальных уравнений первого порядка, заложив основы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах Ньютона, Грегори, Лейбница и др. было начато изучение степенных рядов, послужившее основой для возникновения теории аналитических функций. Лейбниц и И. Бернулли рассмотрели вопрос об интегрировании рациональных функций. При изучении эволют, эвольвент, огибающих и особых точек кривых зарождается

дифференциальная геометрия. Было решено ряд задач (о брахистохроне, геодезических и др.), относящихся к вариационному исчислению. Результаты Паскаля, Ферма и особенно Я. Бернулли, который рассмотрел частный случай закона больших чисел, заложили основы теории вероятностей. Теоремы Паскаля и Дезарга положили начало проективной геометрии.

Несмотря на то, что попытки обоснования математического анализа в то время были еще далеки от совершенства (с точки зрения развитого классического анализа, изучаемого в нынешних университетах), этот недостаток компенсировался быстротой и легкостью получения с помощью математического анализа важных результатов. Под впечатлением от столь быстрых успехов анализа возникало обманчивое впечатление, что его разработка уже близка к завершению. Лейбниц писал Гюйгенсу в 1691: «Я хочу, чтобы мы могли еще в этом веке довести до завершения анализ чисел и линий, по крайней мере в главном, дабы избавить от этой заботы человеческий род, чтобы отныне вся проницательность человеческого разума обратилась к физике» [1, т. 2, с. 287]. Но в действительности в конце XVII в. только началось систематическое построение грандиозного здания математического анализа, которое продолжали строить еще в течение более двух веков.

Об истории математики в XVII в.: [1, т. 2; 2–12; 59–90; 215; 216; 155; 13–23].

Математика в XVIII веке

Математическое образование в Восточной Европе в первой четверти XVIII века

Еще в XVII в. начинает развиваться образование в Восточной Европе, сначала на Украине, а с Украины распространяется и в Россию. В последней четверти XVI в. создаются типографии во Львове и Остроге, связанные с деятельностью первопечатника Ивана Федорова, а затем и в других городах Украины. Центром издательского дела на Украине становится знаменитая типография в Киеве (в Печерском монастыре), основанная в 1617 г. архимандритом Е. Плетенецким. Здесь издаются церковные книги, учебники, словари, философские труды. Крупнейшим высшим учебным заведением в Восточной Европе в XVII–XVIII вв. была Киево-Могилянская академия (до 1701 г. она называлась коллегией), основанная киевским митрополитом Петром Могилой, который в 1632 г. объединил созданную им в Киево-Печерской лавре латинскую школу со школой Киевского братства. Киево-Могилянская коллегия имела антикатолическую направленность. Она позаимствовала многое из программ и методов обучения и воспитания в западноевропейских университетах, а также в иезуитских школах. Эти школы были созданы во многих городах Украины уже с 1575 г. и отличались высоким уровнем обучения и воспитания. Наивысшего расцвета Киево-Могилянская академия достигла при гетмане Иване Мазепе, в начале XVIII в. в ней училось ежегодно до 2000 студентов из разных слоев населения. Обучение имело гуманитарный характер и было основано почти исключительно на латинском языке. Элементы математики читались в небольшом объеме в философских курсах. Обучение длилось 12 лет.

Киево-Могилянская академия дала многих видных деятелей православной церкви, науки и культуры на территории всей Российской

империи. Одним из них был **Феофан Прокопович (1681–1736)**. Он родился в Киеве, учился в Киево-Могилянской академии, а с 1698 г. в течение трех лет – в коллегии в Риме, посетил также некоторые университеты в Германии. С 1704 г., постригшись в монахи, преподает в Киево-Могилянской академии и через несколько лет становится ее ректором. В 1716 г. Петр I забирает его в составе группы преподавателей академии в Москву, а затем в Петербург. Прокопович возглавил «ученую дружину» при Петре I по реформам церковного и государственного управления. В 1721 г. он организовал в Петербурге школу и принял участие в создании Петербургской академии наук. После смерти Петра I духовенство обвинило Прокоповича в еретизме.

Философские труды Ф. Прокоповича, а также его лекционные курсы, читанные в Киево-Могилянской академии в 1707–1709 гг., изданы в 1979–1981 гг. в трех томах на украинском языке в переводе с латинского. Математический курс Прокоповича, входящий в состав философского, содержится в третьем томе и состоит из двух частей: арифметики и геометрии. В арифметической части систематически излагаются сведения о целых и дробных числах, о пропорциях, извлечении квадратных и кубических корней, о прогрессиях. Геометрическая часть содержит планиметрию Евклида в обработке, близкой к выполненной Х. Клавием, главой итальянских астрономов в XVII в., теоремы приведены с доказательствами, имеются также описания некоторых геометрических инструментов. Заметим, что геометрия в таком объеме излагалась на территории Российской империи впервые. Натурфилософии Ф. Прокоповича посвящена книга: Ничик В. М. Феофан Прокопович – М.: Мысль, 1977 г. – 192 с.

В самой России до последнего десятилетия XVII в. образование находилось на самом низком уровне. В Москве в 1687 г. была открыта Славяно-греко-латинская академия, сыгравшая большую роль в образовании, но математика в ней не преподавалась.

Воспитанниками этой академии были знаменитый русский математик-педагог **Леонтий Филиппович Магницкий (1669–1739)**, а также выдаю-

щийся русский ученый **Михаил Васильевич Ломоносов (1711–1765)**. Магницкий изучал математику самостоятельно. С 1701 г. он работал в школе «математических и навигацких наук», открывшейся в этом году в Москве, сначала в качестве помощника учителя математики А. Д. Фархварсона, а затем – старшего учителя и заведующего учебной частью. В 1703 г. Магницкий опубликовал свою книгу «Арифметика, сиречь наука числительная». В России это была первая печатная математическая книга, и до середины XVIII в. она оставалась здесь основным учебником математики. В ней приведены сведения по арифметике, алгебре, геометрии и тригонометрии, а также начальные сведения по астрономии, геодезии и навигации. Доказательства в книге отсутствуют, книга имела прикладной характер. Подробнее о содержании «Арифметики» Магницкого: [119, с. 53–68].

Школу математических и навигацких наук в Москве основал приглашенный Петром I профессор Абердинского университета шотландец **А. Д. Фархварсон (1675–1739)**, который преподавал в ней элементарную математику. Он осуществил перевод на русский язык и первое в России издание (в 1739 г.) восьми книг «Начал» Евклида в переработке бельгийского математика А. Таке, а также пособия по навигации и астрономии. Преподавателями указанной школы были изданы также таблицы логарифмов синусов, косинусов, тангенсов и секансов. В 1715 г. эта школа была переведена в Петербург и послужила основой для создания Морской академии. В этом же году в губерниях России были открыты так называемые «цифирные» школы, но лишь пятой части из них удалось продержаться около 30 лет. «Цифирные» школы сыграли довольно малую роль в образовании, т. к. обучение в них велось на примитивном уровне. Подлинного расцвета достигает в XVIII в. математика в творчестве гениального математика, швейцарца Л. Эйлера (1707–1783), многие годы работавшего в Петербургской академии наук, которая была основана Петром I в 1724 г. Об этом мы подробнее будем говорить позже, а сейчас перейдем к рассмотрению математики в Западной Европе с начала XVIII в.

Математика в Британии в XVIII веке

В XVIII в. продолжает интенсивно развиваться математический анализ, по-прежнему занимая доминирующее положение в математике. Если в XVII в. многие открытия в науке были сделаны любителями, то с XVIII в. наукой занимаются профессиональные ученые-академики, преподаватели. Уже в начале века стало ясно, что до завершения анализа очень далеко. В 1708 г. Лейбниц писал: «Не следует удивляться, что анализ бесконечно малых делает только первые шаги и что мы не хозяева положения и в квадратурах, в обратной задаче касательных и, в еще меньшей мере, при решении дифференциальных уравнений…» [87, с. 257–258].

С начала XVIII в. разгорелся спор о приоритете в создании анализа бесконечно малых, продолжавшийся около 20 лет. Уже в 1697 г. в письме к Гюйгенсу, а в 1699 г. в печати один из представителей школы Ньютона, швейцарский математик Ф. де Дуйе высказался в том духе, что Лейбниц воспользовался готовым аппаратом Ньютона. В 1700 г. Лейбниц публикует оправдательную статью, где в подтверждение самостоятельности своего открытия анализа ссылается на Ньютона, признавшего это в «Началах». После этого Лейбниц не упускал повода подчеркнуть свою независимость от Ньютона в этом вопросе и высказывал некоторые критические замечания, касающиеся его работ. В 1710 г. шотландский математик Дж. Кейль, ученик Ньютона, в специальной публикации прямо обвинил Лейбница в том, что он якобы позаимствовал анализ у Ньютона, изменив лишь обозначения. По просьбе Лейбница Лондонское королевское общество, членами которого были все участники спора, назначает в 1712 г. специальную комиссию. Лейбниц пишет в 1714 г. оправдательное сочинение «История и возникновение дифференциального исчисления», которое, однако, было опубликовано лишь в 1846 г. А в 1715 г. комиссия издает том «Переписки» с выводами, неблагоприятными и оскорбительными для Лейбница, после чего Лейбниц атакует эти выводы в двух анонимных сочинениях и снова подвергается оскорблениям со стороны Кейля и анонимными – со стороны Ньютона.

В 1716 г. Лейбниц умирает, но спор с англичанами продолжил И. Бернулли, который писал: «После смерти Лейбница мне пришлось выдержать натиск всей английской армии: Кейля, Робинса, Пембертона, Тейлора и др.» [90, с. 39]. В отличие от споров Декарта и Ферма, а также соперничества Якоба и Иоганна Бернулли, обогативших науку, спор сторонников Ньютона и Лейбница ничего не принес науке. Анализ рукописей Лейбница неопровержимо подтверждает его полную независимость от Ньютона. Неоспорим и тот факт, что Ньютон разработал анализ на 10 лет раньше, но Лейбниц опубликовал свою разработку анализа на 20 лет раньше Ньютона. Символика Лейбница оказалась более удобной и выдержала проверку временем. Последователи Ньютона отказались использовать символику Лейбница, и это привело, начиная с середины XVIII века, к отставанию математики в Британии в течение почти ста лет. Но до середины XVIII в. математический анализ в Британии продолжал развивать, главным образом, шотландский математик К. Маклорен (1698–1746). В это время больших успехов в теории вероятностей достиг, живший в Лондоне, А. де Муавр (1667–1754), а во второй половине XVIII в. значительные результаты в алгебре получил английский математик Э. Варинг (1734–1798).

Тейлор

Английский математик **Брук Тейлор (1685–1731)** окончил Кембриджский университет и был одним из главных последователей Ньютона. С 1712 г. он являлся членом Лондонского королевского общества, а с 1724 г. – его ученым секретарем. В 1712 г. Тейлор нашел, а в 1715 г. опубликовал в своей книге «Метод приращений прямой и обратный» разложение функции по степеням приращения аргумента, названное в 80-х гг. XVIII в. «рядом Тейлора». Он получил его, впрочем, не строго, из интерполяционной формулы в конечных разностях, найденной Грегори и Ньютоном. Тейлор преобразует ее, а затем приращение независимой переменной устремляет к нулю [3, с. 133–135]. Недавно было выяснено, что ряд Тейлора

встречается раньше в рукописях Ньютона и Грегори, а Тейлор нашел его самостоятельно. В той же работе Тейлор приводит и сходный ряд, представляющий разложение интеграла и найденный ранее И. Бернулли и Лейбницем. Но никто из них не заметил связи между этим рядом и рядом Тейлора. В своей работе Тейлор приводит пример особого решения дифференциального уравнения и термин «особое решение» (см. с. 180 пособия). Из других достижений Тейлора отметим, что он первым получил предложение, равносильное уравнению колебаний струны, и указал вид решений, отвечающих простым гармоническим колебаниям (решение в виде тригонометрического ряда по всем гармоникам привел в 1753 г. Д. Бернулли). Большим успехом пользовались две книги Тейлора «О перспективе». О Тейлоре: [73; 3, с. 133–135].

В 30-х гг. XVIII в. снова остро встал вопрос обоснования математического анализа. В 1734 г. ирландский епископ **Джордж Беркли (1685–1753)**, философ, представитель субъективного идеализма, опубликовал памфлет под названием «Аналитик, или Рассуждение, адресованное одному неверующему математику, в котором исследуется, является ли предмет, принципы и заключения современного анализа более отчетливо познаваемыми и с большей очевидностью выводимыми, чем религиозные таинства и положения веры» [Беркли Дж. Сочинения. – М.: Мысль, 1978]. Сокращенно этот памфлет называют «Аналитик» или, чаще, «Аналист», следуя английскому произношению. Под неверующим математиком здесь имелся в виду делавший критические замечания в отношении религии Э. Галлей – английский астроном, занимавшийся расчетами кометных орбит, близкий друг Ньютона, издавший в 1687 г. на свои средства главный труд Ньютона «Математические начала натуральной философии».

Беркли подверг резкой критике как дифференциалы Лейбница (в то время дифференциал функции отождествляли с ее приращением, а вычисляли по обычным правилам), так и флюксии (первые и последние отношения,

т. е. производные), а также моменты (дифференциалы) Ньютона. Он увидел «явный софизм» в том, что для вывода флюксии от x^n Ньютон делит приращение степени на бесконечно малую, отличную от нуля, а затем полагает эту бесконечно малую равной нулю. Беркли делает вывод, что в области анализа «заключения математиков не получены посредством правильного рассуждения из ясных принципов», а поэтому математики не должны придираться к чему-либо в богословии. То, что в дифференциальном исчислении получаются правильные результаты с помощью нестрогих рассуждений, Беркли объясняет компенсацией ошибок. Он иллюстрирует это на примере вычисления выражения для подкасательной к параболе $y^2 = px$, отождествляя дифференциал dy с приращением ординаты и вычисляя подкасательную двумя способами, в которых получаются ошибки противоположного знака [3, с. 153–155]. Позже, в 1786 г., на основе компенсации ошибок обосновывал анализ французский математик Л. Карно, но его рассуждения, как и пример Беркли, не удовлетворили математиков.

Критика Беркли основных понятий и методов анализа бесконечно малых указала на слабые места в его обосновании и активизировала усилия английских математиков на их преодоление. Английский математик **Б. Робинс (1707–1751)** посвятил защите анализа сразу четыре работы, опубликованные в 1735–1736 гг. [69, с. 167; 130, с. 34–35]. Прежде всего, он представляет метод флюксий как сокращенный вычислительный прием. С этой целью он доказывает правило Ньютона дифференцирования степени также по античному образцу. С целью обоснования анализа Робинс приводит определение предела – отдельно для переменной величины (геометрической) и для переменного отношения (т. е. числовой переменной). «Всякая постоянная величина, к которой приближается, никогда не переходя ее, непрерывно увеличивающаяся или уменьшающаяся переменная, рассматривается как величина, равной которой становится в конце концов или же напоследок переменная, если предположить, что разность между переменной и постоян-

ным пределом при ее приближении к последнему может быть сделана менее любой как угодно малой данной величины». Далее Робинс пишет: «Мы … определяем последнюю величину как предел, к которому переменная величина может приближаться с любой степенью близости, хотя и никогда не может стать абсолютно ей равной». «Точно так же могут приближаться к определенному пределу отношения». В качестве предшественников в вопросе об определении предела Робинс называет Л. Валерио, А. Таке и И. Ньютона. Недостатком определения Робинса, как и у его предшественников, является то, что рассматриваются лишь односторонние пределы, и притом для монотонных величин, не принимающих значения своего предела. Работы Робинса вскоре были забыты, а широкую известность получило такое же понимание предела, высказанное в 1765 г. Д'Аламбером и де ла Шапеллем.

Маклорен

Одним из наиболее знаменитых математиков первой половины XVIII в. был шотландский математик **Колин Маклорен (1698–1746)**, главный из последователей Ньютона. Окончив университет в Глазго, Маклорен в 20-летнем возрасте получает кафедру математики в Абердинском университете. В 1722–1726 гг. работает во Франции, а затем в Эдинбургском университете в Шотландии. Основной его труд – двухтомный «Трактат о флюксиях» (1742). Маклорен пишет, что «первым поводом» для этого труда был «Аналист» Беркли. Маклорен излагает здесь все достижения английской школы анализа, а также свои результаты. Для защиты анализа Маклорен избрал кинематико-геометрический путь, доказывая свойства флюксий (т. е. производных) в манере древних геометров по методу исчерпывания. Сначала он определяет скорость аксиоматически, формулируя 4 аксиомы, в которых описываются соотношения между путем и скоростью для ускоренного и замедленного движений отдельно. Например, если точка движется по прямой ускоренно и за время Δt проходит путь AB, то $v_A\Delta t < AB < v_B\Delta t$, где v_A, v_B –

скорости, соответственно, в точках A и B. Из этих четырех аксиом он выводит 15 теорем, в которых кинематически формулируются важнейшие свойства дифференцирования и интегрирования (в частности, правило дифференцирования сложной функции). В 14-й теореме он доказывает, что скорость, о которой шла речь в аксиомах, равна пределу отношения приращения пути к приращению времени, когда приращение времени стремится к нулю. Теоремы Маклорен доказывает по методу исчерпывания для различных видов движения в отдельности. Понятие предела Маклорен понимал в духе Робинса и сделал его рабочим понятием, определяя с помощью предела сумму ряда, несобственный интеграл и др. Выступая против понятия актуальной бесконечно большой (бесконечно малой), он придерживается идеи потенциальной бесконечно большой (бесконечно малой) как величины, которая может стать больше (меньше) любой наперед заданной величины. Символикой Лейбница Маклорен не пользуется, флюксии он обозначает, как и Ньютон, пунктированными буквами, причем трактует флюксии высших порядков как ускорения различных порядков.

Во втором томе «Трактата о флюксиях» Маклорен по-иному, чем Тейлор, выводит ряд Тейлора (в виде, соответствующем $x_0 = 0$), записывая разложение функции в ряд по степеням аргумента с неопределенными коэффициентами, а затем находит коэффициенты, дифференцируя разложение и полагая аргумент равным нулю. Маклорен отмечает, что это частный случай ряда Тейлора. Но Тейлор не дал этому ряду никаких приложений, а Маклорен выводит с помощью этого ряда уже известные тогда разложения для a^x, $\sin\frac{x}{a}$, $\cos\frac{x}{a}$, полученные иными средствами. Маклорен использует ряд Тейлора также в теории экстремумов, при этом впервые исследует экстремум также в случае обращения в нуль ряда высших производных. Выражая определенный интеграл (рассматриваемый как площадь) в виде разности значений первообразной, Маклорен обобщает эту формулу Ньютона–Лейбница на случай несобственных интегралов по

бесконечному промежутку и от неограниченной функции на конечном промежутке, используя понятие предела. Затем он получает признак сравнения, который мы можем записать так: если существует конечный и отличный от нуля $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x^{-n}}$, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ сходится при $n>1$ и расходится при $n\le 1$. Маклорен устанавливает и свой интегральный признак сходимости ряда, а также самостоятельно выводит формулу суммирования рядов, несколько ранее найденную Эйлером. «Формулы Тейлора» с остаточным членом не было ни у Тейлора, ни у Маклорена, она появилась впервые у Лагранжа в 1797 г. В заключение отметим, что при всей значимости содержания трактата способ построения Маклореном математического анализа в кинематико-геометрических терминах и обоснование по античному методу исчерпывания уже не соответствовали утверждающему себя алгебраико-арифметическому направлению его развития. О трактате Маклорена: [21, вып. 22, с. 9–33], а также [21, вып. 30, с. 36–39].

Муавр

Выдающийся английский математик **Абрахам де Муавр (1667 – 1754)**, француз по происхождению, родился в семье врача в г. Витри во Франции. Будучи гугенотом (протестантом) и не желая, даже под угрозами, перейти в католичество, он переехал около 1688 г. в Лондон и остался там. Частицу «де» он добавил к своей фамилии сам, хотя и не имел дворянского титула. Самостоятельно он глубоко освоил математику, был в дружеских отношениях с Ньютоном и Галлеем, а в 1697 г. его избрали членом Лондонского королевского общества (академии наук).

К числу важнейших достижений Муавра относятся его результаты в теории вероятностей, изложенные в работах «О мере случая» (1711), «Учение о случаях» («Доктрина шансов», изд. в 1718, 1738, 1756), а также «Аналитические этюды о рядах и квадратурах» (1730) с двумя дополнениями.

В работе 1711 г. Муавр решил поставленную еще Гюйгенсом задачу о разорении игрока. В ней предполагается, что игроки A и B в начале игры имеют, соответственно, a и b жетонов, а в каждой партии один из игроков проигрывает другому один жетон, причем вероятности выигрыша каждой партии этими игроками равны, соответственно, p и $q = 1 - p$. Игра продолжается до разорения одного из игроков, т. е. до тех пор, пока у него не останется жетонов. Требуется найти вероятности P_a и P_b разорения игроков A и B. Муавр нашел эти вероятности, а также математическое ожидание числа n партий до разорения одного из игроков и, кроме того, вычислил в частных случаях вероятности $P_{a,n}$ и $P_{b,n}$ разорения игроков за n партий. Вычислением вероятностей P_a и P_b занимался также Я. Бернулли, а вероятности $P_{a,n}$ и $P_{b,n}$ в общем случае вычислил его племянник Николай Бернулли (1687–1759). В физике задаче о разорении игрока соответствует схема случайных блужданий частицы между двумя поглощающими экранами. Эта задача в настоящее время входит в некоторые руководства по теории вероятностей (например, Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 60–63; Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. – Т. 1, гл. XIV; Ширяев А. Н. Вероятность. – М.: Наука, 1980. – Гл. 1, § 9).

Но главные результаты Муавра содержатся во втором дополнении 1733 г. к работе «Аналитические этюды», которое позже вошло в книгу «Учение о случаях». Если каждое из n независимых испытаний имеет два возможных исхода: A с вероятностью p и $\overline{A}$ с вероятностью $q = 1 - p$, то говорят, что имеет место схема Бернулли испытаний. Тогда вероятность $P_n(k)$ появления события A в n испытаниях ровно k раз удовлетворяет так называемому биномиальному распределению $P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. При

больших n вычисление биномиальных коэффициентов $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ затруднительно. Для удобства вычисления факториалов больших чисел Муавр получает асимптотическую формулу $n! \sim B\sqrt{n}n^n e^{-n}$ при $n \to \infty$ с приближенно найденной постоянной $B \approx 2{,}507$. Желая выразить постоянную B через какую-нибудь известную постоянную, Муавр обратился к шотландскому математику Стирлингу, и тот нашел, что $B = \sqrt{2\pi}$. Поэтому «формулу Стирлинга» для $n!$ правильно было бы называть формулой Муавра или Муавра–Стирлинга. Муавр впервые вычислил и опубликовал таблицу $\ln n!$ для $n = 10,\ 20,\ 30,\ \ldots,\ 900$. В указанном выше дополнении 1733 г. к «Аналитическим этюдам» Муавр приводит две свои замечательные предельные теоремы, которые сейчас называются локальной и интегральной теоремами Муавра–Лапласа и в уточненном виде входят в современные учебники теории вероятностей. Результаты Муавра можно передать в современном обозначении следующим образом, полагая $x_k = \dfrac{k-np}{\sqrt{npq}}$ (нормированное отклонение числа k «успехов» в n испытаниях Бернулли от np, т. е. математического ожидания).

Локальная теорема. В схеме Бернулли

$$P_n(k) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-\frac{x_k^2}{2}} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Интегральная теорема. В схеме Бернулли при любых a и b

$$\lim_{n\to\infty} P\{a \le x_k \le b\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k:\ a \le x_k \le b} P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx.$$

О соответствующей равномерной сходимости, которая имеет место в этих теоремах, в то время не было речи, т. к. это понятие появилось лишь в середине XIX в. Пользуясь «формулой Стирлинга», Муавр сначала доказывает локальную

теорему в случае $p = q = \frac{1}{2}$, а затем распространяет рассуждение на общий случай. Далее, учитывая, что $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = \frac{1}{\sqrt{npq}}$, он из локальной теоремы выводит интегральную; впрочем, его рассуждения соответствуют случаю отрезка $[-b;\ b]$. Вновь доказал локальную и интегральную теоремы Лаплас в «Аналитической теории вероятностей» (1812). Он не упомянул Муавра, и поэтому до конца XIX в. эти теоремы назывались теоремами Лапласа.

Я. Бернулли в «Искусстве предположений» (1713) дает следующее «определение»: «Вероятность есть степень достоверности и отличается от нее как часть от целого». Вслед за этим он поясняет на примере, что вероятность есть отношение числа благоприятствующих исходов к числу всех возможных случаев наступления события, неявно подразумевая, что все случаи равновероятны (равновозможны). Это классическое понимание вероятности. Если же нет возможности *a priori* подсчитать числа благоприятствующих и всех возможных шансов, то, как указывает Бернулли, их «можно получить *a posteriori*, т. е. из многократного наблюдения результатов в подобных примерах». Это статистическое понимание вероятности. Муавр дает классическое определение вероятности, правда, в неявном предположении, что события равновероятны: «мы строим дробь, числитель которой будет число случаев появления события, а знаменатель – число случаев, при которых оно может появиться или не появиться, дробь будет выражать действительную вероятность его появления». На то, что события при этом должны быть равновероятными, впервые указал Лаплас.

Еще в 1662 г. Арбутнот, английский переводчик книги Гюйгенса «О расчетах в азартных играх» (1657), добавил несколько задач, среди них впервые появилась задача на отыскание геометрической вероятности: как часто при бросании параллелепипеда с ребрами a, b, c будет выпадать грань ab? Ее решил Т. Симпсон в 1740 г. Французский естествоиспытатель

Жорж Луи Леклерк Бюффон (1707–1788), с 1739 г. – директор Ботанического сада в Париже, опубликовал две работы, посвященные геометрической вероятности. Первая из них вышла в 1733 г., в ней Бюффон решает задачу: найти вероятность того, что круглый диск, брошенный на прямоугольную полосу, разбитую на квадраты, попадет внутрь одного из них. Известна вторая задача Бюффона – о бросании иглы длины l на плоскость, разграфленную параллельными прямыми на расстоянии $a > l$ друг от друга. Требуется найти вероятность того, что наудачу брошенная игла пересечет какую-либо из этих прямых. Искомая вероятность $p = \frac{2l}{\pi a}$. В 1850 г. Р. Вольф брал $a = 45$ мм и иглу длиной $l = 36$ мм и бросал ее 5000 раз, получил 2532 пресечения. Забавно, что отсюда получается экспериментально значение $\pi = \frac{2l}{pa} \approx 3{,}16$ с избытком $\approx 0{,}02$.

До Муавра использовалось правило умножения вероятностей без четкой формулировки. Муавр в первом же издании «Учения о случаях» (1718) впервые четко определяет понятия независимых и зависимых случайных событий и, пользуясь понятием условной вероятности, дает четкую формулировку теоремы умножения вероятностей $P(AB) = P(A)P(B / A)$ в следующих словах: «…вероятность появления двух зависимых событий равна произведению вероятности одного из них на вероятность того, что другое должно появиться, если первое уже появилось. Это правило может быть обобщено и на случай нескольких событий».

Прежде чем говорить о формуле Муавра для комплексных чисел в тригонометрической форме, скажем о творчестве одного его современника.

Английский математик **Роджер Коутс (Котес, 1682–1716)** был способным учеником Ньютона. После окончания Кембриджского университета Коутс работал в нем с 1706 г. профессором математики и астрономии. Помогая Ньютону в подготовке второго издания «Математических начал натуральной философии», Коутс побудил Ньютона исправить ряд

неточностей в доказательствах. В работе «Логометрия» («Измерение отношений»), написанной в 1714 г., изданной в 1717 г., Коутс излагает теорию логарифмической функции («меры отношений»), исходя, по существу, из функционального уравнения, которое можно записать в современных обозначениях в виде $f(x^n) = nf(x)$ при исходном условии $f(1) = 0$ (под отношениями он понимает действительные числа). Здесь он (до Эйлера) приводит замечательное соотношение $xi = \ln(\cos x + i \sin x)$, выраженное, однако, в громоздкой словесной формулировке. После смерти Коутса его сочинения были изданы в книге под названием «Гармония мер» (1722). Первую часть книги составила «Логометрия», а вторая часть посвящена интегральному исчислению, в том числе приближенному вычислению интегралов. В частности, была приведена формула $\int_0^h f(x)dx = \frac{h}{6}(f(0) + 4f(\frac{h}{2}) + f(h))$, которую называют симпсоновой. Более общую формулу до Коутса нашел Грегори, но не опубликовал, а позже Коутса – в 1743 г. английский математик Т. Симпсон (1710–1761). В «Гармонии мер» была приведена без доказательства и теорема Коутса о разложении двучленов вида $x^n \pm a^n$ на множители вида $x - a$ или $x + a$ и на квадратные трехчлены вида $x^2 - 2ax\cos\frac{2k\pi}{n} + a^2$, соответствующие парам комплексно сопряженных корней.

Муавр в «Аналитических этюдах о рядах и квадратурах» (1730) использует ранее полученное им с помощью построений, связанных с единичной гиперболой, равенство $x = \frac{1}{2}\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}} + \frac{1/2}{\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}}}$, где $l = \cos n\varphi$, $x = \cos\varphi$. Отсюда, полагая $\sqrt[n]{l + \sqrt{l^2 - 1}} = z$, он получает два уравнения $z^2 - 2xz + 1 = 0$ и $z^{2n} - 2lz^n + 1 = 0$ и далее пишет, что если из этих двух

уравнений исключить z, «то получим новое уравнение, из которого определится зависимость между косинусами l и x». Муавр не выписывает его, хотя оно представляет формулу Муавра в привычном для нас виде.

Действительно, решая указанные выше два уравнения, получаем

$$z = x \pm \sqrt{x^2 - 1}, \quad z^n = l \pm \sqrt{l^2 - 1},$$

откуда следует формула Муавра

$$(\cos\varphi \pm i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi \pm i\sin n\varphi.$$

То, что он не выписывает ее в этом виде, объясняется, по-видимому, тем, что в то время английские математики считали комплексные числа не настоящими числами. В этой же работе Муавр доказал высказанное Коутсом утверждение для уравнения $z^n - 1 = 0$, равносильное представлению всех корней n-й степени из единицы в тригонометрической форме. В 1740 г. Муавр обобщает рассуждение на уравнения вида $z^n - (a + \sqrt{-b}) = 0$ и находит все n корней n-й степени из комплексного числа. Эйлер во «Введении в анализ бесконечных» (1748) очень широко пользуется записью комплексных чисел в тригонометрической форме, получает по-своему формулу Муавра (§ 133), обобщая легко проверяемое тождество

$$(\cos x + i\sin x)(\cos y + i\sin y) = \cos(x + y) + i\sin(x + y),$$

где он затем полагает $y = x$, на случай n сомножителей в левой части, неявно используя математическую индукцию. Там же Эйлер получает свои замечательные формулы, связывающие e^{ix}, $\cos x$ и $\sin x$ (§ 138). Он не знал, что Коутс получил формулу $xi = \ln(\cos x + i\sin x)$ раньше.

Как видим, представление комплексных чисел в тригонометрической и показательной форме появилось задолго до геометрической интерпретации комплексных чисел.

О Муавре: [203, с. 299–303; 1, т. 3, с. 58–59, 128–129], см. также [160–162].

Отметим еще достижения следующих британских математиков XVIII века.

Шотландский математик **Джеймс Стирлинг (1692–1770)** окончил Оксфордский университет, член Лондонского королевского общества (1729), работал в Шотландском горном обществе. В своем главном труде «Разностный метод» (1730) дал асимптотическое разложение логарифма *Г*-функции (ряд Стирлинга), исследовал некоторые бесконечные произведения, свойства *В*-функции и гипергеометрической функции. О «формуле Стирлинга» говорилось в очерке о Муавре. В работе «Ньютоновы линии третьего порядка» (1717) прибавил еще два вида кривых третьего порядка к 72 видам, известным Ньютону, и снабдил изложение Ньютона доказательствами.

Английский математик **Томас Симпсон (1710–1761)** изучал математику самостоятельно, член Лондонского королевского общества (1746). Сначала работал учителем и ткачом, а с 1743 г. – профессор Военной академии. В «Новом трактате о флюксиях» (1743) применял математический анализ к механике. О формуле Симпсона приближенного вычисления интеграла говорилось выше в связи с Коутсом. Симпсон является одним из основоположников теории ошибок. Занимался также сферической тригонометрией и теорией рядов.

Варинг

Английский математик **Эдуард Варинг (1734–1798)** окончил Кембриджский университет (1757), доктор медицины (1767), был врачом в Лондоне и профессором математики Кембриджского университета, член Лондонского королевского общества (1763). Его значительные достижения в математике получили оценку в более позднее время, а современники их не оценили из-за неясной манеры изложения. Основные работы Варинга относятся к алгебре, теории алгебраических кривых и теории чисел.

Варинг предвосхитил работы Лагранжа и Гаусса по теории резольвент алгебраических уравнений. Несколько позже Эйлера доказал основную

теорему для симметрических функций (см. далее в очерке о Лагранже). По формулам Ньютона степенные суммы $x_1^m + ... + x_k^m$ выражаются через элементарные симметрические функции рекуррентно. Варинг привел формулы, непосредственно выражающие такие суммы через элементарные симметрические функции. Он нашел формулы для выражений сумм m-х степеней корней алгебраических уравнений через коэффициенты уравнения и обратно, занимался отделением и приближенным вычислением корней алгебраических уравнений.

Варинг дал классификацию алгебраических кривых четвертого порядка.

Несколько раньше, чем Лагранж, Варинг получил интерполяционную формулу, которую называют формулой Лагранжа.

В своих «Алгебраических размышлениях» (1770) Варинг выдвинул важную теоретико-числовую проблему: доказать, что каждое натуральное число можно представить в виде суммы n-х степеней натуральных чисел, причем число k слагаемых зависит только от n (он выдвинул ее для $n = 3$ и $n = 4$). В общем виде эту проблему решил немецкий математик Д. Гильберт в 1909 г., но с очень грубой оценкой числа k слагаемых. Более точные результаты получили в 1920–1925 гг. английские математики Харди и Литлвуд, а в 1934 г. И. М. Виноградов дал оценку, близкую к окончательной. В 1942 г. Ю. В. Линник решил проблему Варинга элементарными методами [21, 1959, вып. 12]. О Стирлинге, Симпсоне и Варинге: [14–17].

Математика в континентальной Европе в XVIII веке

Эйлер

В математике XVIII век называют веком Эйлера – гениального математика, а также механика, физика и астронома, отличавшегося необыкновенной работоспособностью. **Леонард Эйлер (1707–1783)** родился в г. Базеле в Швейцарии в семье пастора. Окончил Базельский университет, где слушал лекции по математике самого выдающегося профессора

И. Бернулли, который также беседовал с ним индивидуально по субботам в течение нескольких лет. Сыновья И. Бернулли Николай и Даниил, с которыми Эйлер дружил, уехали в 1725 г. в Петербург по приглашению открывшейся там в 1724 г. Академии наук. По словам Эйлера, у него «явилось неописуемое желание поехать вместе с ними». Благодаря их ходатайству Эйлера тоже приглашают, и в 1727 г. он начинает работать в Петербургской академии наук. Ее членами в то время были сплошь иностранцы, в большинстве малоспособные, но среди них, кроме Эйлера и Д. Бернулли, было несколько видных ученых: математики Х. Гольдбах и Я. Герман, астроном и географ Ж. Н. Делиль и др. С 1728 г. стал издаваться журнал «Записки (комментарии) Петербургской академии наук» на латинском языке. Эйлер регулярно печатает в нем свои работы, часто по нескольку в одном томе. Главная черта его натуры – работать в любой обстановке и при любых обстоятельствах. Сначала он работает в должности адъюнкта в математическом классе, в 1731 г. становится профессором физики, а с 1733 г. занимает должность профессора математики вместо возвратившегося в Базель Д. Бернулли. В 1734 г. Эйлер женится на дочери швейцарского художника, проживавшего в Петербурге. В 1736 г. вышла двухтомная книга Эйлера «Механика, или наука о движении, изложенная аналитически», т. е. с помощью математического анализа, она имела 1000 страниц большого формата. В 1738 г. в результате абсцесса Эйлер ослеп на правый глаз. В эти годы, кроме занятий математикой и механикой, Эйлер составляет астрономические таблицы, принимает активное участие в составлении географического атласа России, пишет первый том двухтомника «Морская наука, или трактат о кораблестроении и кораблевождении». Слава Эйлера быстро растет. Первый петербургский период жизни Эйлера продолжался 14 лет, за это время им написано 85 работ и опубликовано более 50.

В 1740 г. скончалась императрица Анна Иоанновна, и наступило тревожное время дворцовых раздоров (бироновщина, регентство). Положение Петербургской академии стало неопределенным, и Эйлер уезжает

в Берлин по приглашению прусского короля Фридриха II, надумавшего превратить почти бездействовавшее после смерти Лейбница в 1716 г. «Научное общество» в Академию наук. Эйлер работает в Берлинской АН в течение 25 лет, за это время им написано около 300 работ, которые публиковались примерно поровну в журналах Петербургской и Берлинской академий, не успевавших, однако, их все напечатать. В берлинский период Эйлер опубликовал ряд крупных трудов: двухтомник «Введение в анализ бесконечных» (1748), «Дифференциальное исчисление» (1755), 2-й том «Морской науки», создал в 1751 г. свою первую теорию движения Луны, разрабатывал теорию чисел, вариационное исчисление и оптику. И. Бернулли в 1745 г. обращается к нему со словами «несравненному Леонарду Эйлеру – главе математиков». Президентом Берлинской АН в то время был известный французский механик, астроном и геодезист П. Л. М. де Мопертюи (1698–1759), с которым у Эйлера сложились хорошие отношения и которого он фактически заменял после 1759 г. Славу Мопертюи принесла, прежде всего, возглавляемая им экспедиция по измерению меридиана в Лапландии (за Полярным кругом на границе между Швецией и Финляндией). Эти измерения показали, что Земля сплющена у полюсов, что подтверждало теорию Ньютона. Кроме того, Мопертюи в 1746 г. независимо от Лейбница открыл принцип наименьшего действия в виде $\int mvds = \min$ и опубликовал его. Этому принципу Мопертюи придавал значение универсального закона. Не располагая его научным обоснованием, он считал этот принцип выражением божественного экономного плана устройства Вселенной. По поводу этого принципа между Мопертюи и швейцарским математиком Кёнигом, критиковавшим Мопертюи, возник большой скандал в Академии, усугубившийся едкими и необъективными памфлетами Вольтера, направленными против Мопертюи и задевавшими и Эйлера [92, с. 73–92]. У Эйлера были натянутые отношения с королем Фридрихом II, который, претендуя на роль «просвещенного монарха», заигрывал с французскими просветителями, но проявлял высокомерие по отношению к ученым, не проживавшим

во Франции. В то же время Екатерина II убеждала Эйлера вернуться в Петербург. Эйлер согласился на переезд, а вместо него в Берлинскую академию наук был приглашен Лагранж.

По прибытии Эйлера с семьей из 16 человек в Петербург в 1766 г. ему были созданы наилучшие условия для жизни и работы. Второй петербургский период жизни Эйлера продолжался 17 лет до его смерти, а всего в России он прожил 31 год. В 1668–1670 гг. был опубликован один из крупнейших трудов Эйлера – трехтомное «Интегральное исчисление». В 1771 г. из-за неудачной операции на левом глазу Эйлер почти полностью теряет зрение, различая лишь крупные буквы, написанные мелом на доске. Тем не менее, он работает с еще большей продуктивностью: около половины его работ написаны с 1771 г. и до его смерти в 1783 г. Пользуясь своей феноменальной памятью, он пишет мелом на черной доске стола или диктует свои работы ассистентам (по 25 и более работ в год). После его смерти Петербургская АН продолжала публиковать его работы еще в течение 80 лет. А всего им было написано рекордное количество работ: 866, причем среди них имеется немало крупных книг.

Начиная с 1911 г. Швейцарское общество естествоиспытателей при содействии ряда академий издает полное собрание сочинений Эйлера. Опубликовано уже более 70 томов, а всего предполагается опубликовать более 80 томов его сочинений.

Работы Эйлера по математическому анализу и дифференциальным уравнениям составляют примерно 60 % его работ. Многие замечательные результаты Эйлера содержатся в его двухтомнике «Введение в анализ бесконечных» (1748), см. русский перевод 1961 г. Первый том посвящен изложению теории элементарных функций, рядов и бесконечных произведений без использования дифференцирования и интегрирования, но с применением формального перехода к пределу. Во втором томе излагается аналитическая геометрия. Мы сначала рассмотрим кратко содержание первого тома. Первые его 5 глав посвящены понятию функции и вполне современной класси-

фикации функций. Термин «функция» принадлежит Лейбницу, но Эйлер вводит его в широкое употребление и старательно избегает кинематико-геометрического представления о функции, совершенно не пользуясь рисунками. Эйлер делает понятие функции одним из центральных понятий анализа. «Весь анализ бесконечных, – пишет он, – вращается вокруг переменных количеств и их функций» [3, с. 75]. Он приводит определение: «Функция переменного количества есть аналитическое выражение, составленное каким-либо образом из этого переменного количества и чисел или постоянных количеств» [3, с. 76]. Через несколько лет в «Дифференциальном исчислении» (1755) Эйлер дает уже общее определение функции, по смыслу близкое к современному: «Когда некоторые количества зависят от других таким образом, что при изменении последних и сами они подвергаются изменению, то первые называются функциями вторых. Это наименование имеет чрезвычайно широкий характер; оно охватывает все способы, какими одно количество может определяться с помощью других. Итак,... все количества, которые как-либо зависят от x, т. е. определяются им, называются его функциями» [3, с. 79]. У И. Бернулли встречаются обозначения функции в виде φx без скобок, а Эйлеру принадлежит обозначение $f(x)$, но во «Введении в анализ бесконечных» он им не пользуется, оно имеется ранее в одной статье, написанной в 1734–1735 гг. и опубликованной в 1740 г., а также в более поздних работах.

В главе II «Введения в анализ бесконечных», в частности, рассматривается вопрос о разложении рациональной функции на простые дроби по методу неопределенных коэффициентов. В главе III излагаются способы приведения иррациональных функций к рациональному виду с помощью подстановок, в частности, тех, которые использовал Диофант, а теперь они называются подстановками Эйлера. В главе VI рассматривается построение показательной и логарифмической функций, впрочем, нестрогое, т. к. для строгого построения еще не было соответствующих средств. Тригонометрические функции до Эйлера рассматривались лишь как линии в круге, Эйлер

рассматривает их как числовые функции и в главе VIII выводит их основные свойства, исходя из основного тригонометрического тождества и формул сложения для синуса и косинуса. Там же он получает свои знаменитые формулы, связывающие функции $\sin x$, $\cos x$ и e^{ix} (§ 138, см. также [3, с. 135–142]). Отметим, что до получения Эйлером формулы $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ английский математик Р. Коутс в «Логометрии» (1714) получил формулу $\ln(\cos x + i\sin x) = ix$, но эта формула Коутса не была замечена математиками. Эйлер ввел современные обозначения тригонометрических функций (только он пишет, например, $\sin.z$ вместо $\sin z$), в 1736 г. – обозначение e для основания натуральных логарифмов, а в 1777 г. – обозначение i (во «Введении в анализ бесконечных» он вместо i пишет $\sqrt{-1}$). Обозначение π для отношения длины окружности к диаметру, введенное английским математиком У. Джонсом в 1706 г., стало общепринятым после широкого его употребления Эйлером, в частности, во «Введении в анализ бесконечных».

Большое место в первом томе «Введения» уделено рядам и бесконечным произведениям. Эйлер выводит разложения в степенные ряды бинома с рациональным показателем, функций a^x, $\ln(1+x)$, $\sin x$, $\cos x$ и др. Эйлер не пользуется здесь рядом Тейлора, а широко применяет биномиальный ряд и нестрогие с точки зрения развитого классического анализа предельные переходы. При этом знак предела он не использует, а бесконечно малые понимает как актуальные бесконечно малые в духе бесконечно малых чисел современного неархимедова (нестандартного) анализа, то же касается и бесконечно больших. В «Дифференциальном исчислении» Эйлер считает бесконечно малые просто нулями, но нулями разных порядков. Так, в § 83 он пишет: «Но количество бесконечно малое есть не что иное, как количество исчезающее, и потому оно точно равно нулю». И далее: «Стало быть, существует бесконечно много порядков бесконечно малых величин, и хотя все эти величины равны нулю, следует

четко различать их друг от друга, если мы обращаемся к их взаимозависимости». Во «Введении в анализ бесконечных» Эйлер пишет, например, равенства вида $a^{\omega}=1+k\omega$ (здесь $k=\ln a$), $\ln(1+x)=\dfrac{(1+x)^{\omega}-1}{\omega}$, где ω – бесконечно малое число; $e^{z}=(1+\dfrac{z}{n})^{n}$, где n – бесконечно большое. Ряд для a^{z} он получает формально следующим образом: равенство $a^{n\omega}=(1+k\omega)^{n}$ с помощью биномиального ряда переписывает в виде

$$a^{n\omega}=1+\frac{n}{1}k\omega+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}k^{2}\omega^{2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}k^{3}\omega^{3}+\ldots,$$

а затем берет здесь бесконечно большое $n=\dfrac{z}{\omega}$ и, заменяя $n-1$, $n-2$ и т. д. через n, находит, что $a^{z}=1+\dfrac{k}{1}z+\dfrac{k^{2}}{1\cdot 2}z^{2}+\dfrac{k^{3}}{1\cdot 2\cdot 3}z^{3}+\ldots$ (здесь $k=\ln a$; в частности, $k=1$ при $a=e$). Ряды для $\sin x$ и $\cos x$ Эйлер выводит из формулы Муавра путем формального перехода к пределу в полученных из нее рядах.

Кроме рядов, Эйлер во «Введении» широко и формально использует бесконечные произведения. В частности, в § 156–158 он впервые получает разложения функций shx, chx, $\sin x$, $\cos x$ в бесконечные произведения, хотя и с помощью необоснованных вычислений с бесконечно большими натуральными n. Так, для $shx=\dfrac{1}{2}(e^{x}-e^{-x})$ он записывает «равенство» $e^{x}-e^{-x}=a^{n}-b^{n}$, где $a=1+\dfrac{x}{n}$, $b=1-\dfrac{x}{n}$, а n – «бесконечно большое число». Выражение $a^{n}-b^{n}$ разлагается в произведение $2x$ и трехчленных множителей вида $a^{2}-2ab\cos\dfrac{2k\pi}{n}+b^{2}$ $(k\neq 0)$, далее с учетом

выражений для a, b и «равенства» $\cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ при бесконечно малых α получается приближенное равенство

$$a^2 - 2ab\cos\frac{2k\pi}{n} + b^2 \approx \left(1 + \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right)\left(\frac{2k\pi}{n}\right)^2,$$

а тогда делается вывод, что

$$shx = x\left(1 + \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 + \frac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots.$$

Эйлер записывает бесконечные произведения в развернутом виде, знак $\prod$ для произведения ввел Гаусс в 1812 г. Знак $\sum$ для суммы ввел Эйлер в 1755 г.

Пожалуй, самыми знаменательными являются главы X и XV «Введения», посвященные так называемой дзета-функции $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ и другим аналогичным рядам, члены которых представляют собой числа, обратные степеням натуральных чисел. Уже в 1736 г. Эйлер нашел, что $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ и $\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$. В главе X путем сравнения ряда и бесконечного произведения для shx он вычисляет $\zeta(s)$ для четных $s = 2,\ 4,\ \ldots,\ 26$. С помощью аналогичного приема он получает также суммы для большого числа рядов типа ζ-функции с положительными и знакочередующимися членами. В главе XV эти исследования продолжаются, но теперь уже и для представления в виде рядов выражений $\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)\ldots}$. В § 274 Эйлер получает свое знаменитое тождество для $\zeta(s)$ при действительных s, а именно: $\prod_p (1 - \frac{1}{p^s})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$, где p пробегает все простые числа 2, 3, 5, … .

Приводится большое число примеров вычисления сумм рядов и бесконечных произведений. Обладая замечательными вычислительными способностями, Эйлер приближенно вычисляет с большим числом десятичных знаков суммы некоторых рядов. Отметим, что функция $\zeta(s)$ является одной из основных в теории чисел. С помощью тождества Эйлера для $\zeta(s)$ можно по-иному, чем это сделал Евклид, доказать, что простых чисел бесконечно много. В XIX в. немецкий математик П. Дирихле и русский математик П. Л. Чебышёв использовали ζ -функцию при отыскании закона распределения простых чисел. Наиболее важные свойства ζ -функции были обнаружены, начиная с работ немецкого математика Б. Римана, который в 1859 г. аналитически продолжил ее в комплексную плоскость $s = \sigma + i\tau$. Риману принадлежит и термин «дзета-функция», и обозначение $\zeta(s)$. Ему удалось дать строгий вывод функционального уравнения для ζ -функции, известного в ином виде Эйлеру, который не мог его доказать, не располагая аналитическим продолжением ζ -функции.

Одной из самых знаменитых во «Введении» является глава XVI «О разбиении чисел на слагаемые», в которой с помощью разложения рациональной функции вида $\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...(1-x^k)}$ в ряд Эйлер с глубокой проницательностью и полнотой исследует вопрос о том, сколькими различными способами данное натуральное число n можно представить в виде суммы слагаемых, взятых из чисел 1, 2, 3, … , k.

Эйлер является главным из основоположников теории цепных (иной термин – непрерывных) дробей, он детально, но формально изложил ее в главе XVIII «Ведения в анализ бесконечных». См. также [21, вып. 10, 1957, с. 305–326].

Заметим, что, наряду со сходящимися рядами и бесконечными произведениями, Эйлер широко использует и расходящиеся. Он рано понял, что многие важные результаты можно получить быстрее и легче с помощью

расходящихся рядов. Для оправдания действий с такими рядами Эйлер обобщает и на них понятие суммы. В § 111 «Дифференциального исчисления» он пишет: «... мы припишем слову «сумма» значение, отличное от обычного. Так, мы скажем, что сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд. В этом смысле у бесконечного ряда $1 + x + x^2 + x^3 +$ и т. д. истинная его сумма будет равна $\frac{1}{1-x}$, ибо этот ряд происходит из разложения этой дроби, какое бы число ни подставлять вместо x. При этом соглашении, если ряд будет сходящимся, то новое определение слова «сумма» совпадает с обычным, а так как расходящиеся ряды не имеют никакой суммы в собственном смысле слова, то из этого нового наименования не проистечет никаких неудобств. Приняв это определение, мы сможем сохранить выгоды пользования расходящимися рядами и в то же время защититься от всяческих обвинений» [3, с. 148]. Однако построить строгую теорию обобщенных методов суммирования рядов в XVIII веке было невозможно. А поскольку при использовании расходящихся рядов были получены, даже самим Эйлером, и некоторые ошибочные результаты, то концепция Эйлера встретила отдельные возражения уже в XVIII веке, а в первой половине XIX века, в связи с реформой анализа, подверглась резкой критике. Расходящиеся ряды и точка зрения Эйлера были реабилитированы лишь после создания в конце XIX века и в начале XX века строгой теории обобщенного суммирования рядов, обеспечившей правильное их использование. Из числа замечательных примеров использования Эйлером расходящихся рядов укажем на нахождение им функционального уравнения для ζ-функции, получение формулы суммирования рядов, найденной несколько позже и Маклореном, а также асимптотическое представление частичной суммы гармонического ряда в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} = C + \ln n - \frac{1}{2n} - \frac{1}{12n^2} + \frac{1}{120n^4} - \dots .$$

Число C, названное впоследствии постоянной Эйлера, он вычислил с 15 верными знаками, а также представил в виде $C=\int_0^1\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{\ln x}\right)dx$, $C=1-\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n}(\zeta(n)-1)$.

Второй том «Введения» посвящен аналитической геометрии, в нем приведена теория кривых 2-го порядка, отличная от ньютоновой классификация кривых 3-го порядка на 16 типов, а также приведены классификации кривых 4-го порядка на 146 видов и поверхностей 2-го порядка (см. также с. 150 пособия).

Рассмотрим некоторые особенности изложения Эйлером дифференциального исчисления. Его книга «Дифференциальное исчисление» была написана в 1748 г., а опубликована в 1755 г. Эйлер первым из математиков проводит здесь, как и в других руководствах по анализу, четкую установку на его арифметизацию. В предисловии он пишет: «Настоящая работа целиком находится в границах чистого анализа, так что у меня ни разу не было необходимости использовать для истолкования понятий ни одного рисунка». Прежде чем перейти к изложению дифференциального исчисления, он посвящает две главы исчислению конечных разностей. Эйлеру принадлежат обозначения вида Δx, Δy. В основу дифференциального исчисления Эйлер кладет определение производной как предела отношения конечных разностей – приращений функции и аргумента. «Нужно мысленно представить себе, – пишет он, – что эти приращения, непрерывно изменяясь, становятся все меньшими, так что их отношение непрерывно приближается к некоторому пределу, которого оно, однако, достигает только тогда, когда они становятся нулями. Этот предел, который как-будто является последним из названых отношений, и есть настоящий предмет дифференциального исчисления». Он не дает отдельно определения предела функции и не пользуется обозначением предела. Предельные равенства в записи Эйлера без использования знака предела следует понимать в духе современного

Кроме изложения правил дифференцирования функций одной переменной, в «Дифференциальном исчислении» впервые приведен раздел, посвященный дифференцированию функций многих переменных. Эйлер применяет для обозначения частных производных скобки, например: $\left(\frac{dP}{dx}\right)$. Обозначения вида $\frac{\partial f}{\partial x}$ с «круглым» ∂ впервые использовал А. Лежандр в 1786 г., а затем с 1841 г. широко применял К. Г. Якоби. Эйлер приводит первое доказательство теоремы о независимости смешанной производной от очередности дифференцирования по аргументам. Здесь же он показывает необходимость условия $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ для того, чтобы выражение $Pdx+Qdy$ было полным дифференциалом (§ 232). Это условие почти одновременно с Эйлером в 1739 г. установил и французский математик А. К. Клеро (1713–1765). В § 222–225 Эйлер приводит свою теорему об однородных функциях. При изложении вопроса об экстремуме функции одной переменной он использует разложение функции в ряд Тейлора, рассматривая также и случаи обращения в нуль некоторых высших производных. Эйлер различает локальный и абсолютный экстремумы. Достаточные условия существования экстремума функции двух переменных указаны Эйлером неверно. Он считал, что функция $f(x,y)$ в точке, где $f_x^{'}=f_y^{'}=0$ и обе производные $f_{x^2}^{"},f_{y^2}^{"}$ отрицательны, имеет максимум, а где положительны – минимум. Верные условия экстремума функций нескольких переменных привел Лагранж в 1759 г.

Как уже говорилось, правило раскрытия неопределенности вида $\frac{0}{0}$ с помощью дифференцирования было найдено Иоганном Бернулли в 1694 г., а впервые опубликовано в книге Лопиталя в 1696 г. Кроме этой неопре-

деленности, Эйлер в «Дифференциальном исчислении» рассматривает также неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$ и др.

Рассмотрим кратко вопрос об интегрировании у Эйлера в его трехтомнике «Интегральное исчисление» (1768–1770). Первый том содержит около 400 страниц, его первая часть посвящена интегрированию функций, а вторая – интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Во втором томе интегрируются обыкновенные дифференциальные уравнения второго и высших порядков, а в третьем – дифференциальные уравнения в частных производных, кроме того, добавлено приложение о вариационном исчислении. Значительную часть первого тома составляют результаты Эйлера, а материалы второго и третьего томов почти целиком состоят из его достижений. Таким образом, одной из главных заслуг Эйлера является то, что он основал две тесно связанные с анализом науки – обыкновенные дифференциальные уравнения и дифференциальные уравнения в частных производных. Мы рассмотрим здесь кратко содержание первой части первого тома «Интегрального исчисления», посвященного интегрированию функций (см. также обзор в [79, с. 144–151]).

В предыстории интегрального исчисления, начиная с Архимеда, большую роль выполняли методы, представляющие собой нахождение определенных геометрических величин (главным образом, площадей) в виде аналогов вычисления определенных интегралов, в частности, с помощью интегральных сумм. Но уже Ньютон представляет себе операцию интегрирования, прежде всего, как вычисление первообразной, широко используя в случае трансцендентных функций разложения в степенные ряды и почленно интегрируя их. Важное значение Ньютон придает и составлению таблиц первообразных. В XVIII в. и в первые два десятилетия XIX в. (до Коши) понятие определенного интеграла как предела интегральных сумм отодвигается далеко на задний план. Главной задачей считается разработка методов вычисления неопределенных интегралов, а определенные интегралы рассмат-

ривают как разность первообразных. Эйлер придерживается именно этой точки зрения.

В начале первого тома «Интегрального исчисления» Эйлер пишет: «Интегральное исчисление есть метод, посредством которого по данному соотношению между дифференциалами количеств находят соотношение между самими количествами, а действие, с помощью которого это достигается, называется интегрированием». И далее: «$\int Xdx$ обозначает то переменное количество, дифференциал которого равен Xdx». Полным интегралом Эйлер называет интеграл, содержащий произвольную постоянную (т. е. неопределенный интеграл). Интеграл при конкретном значении постоянной интегрирования Эйлер называет частным интегралом. Попутно заметим, что термин «первообразная» ввел Лагранж в 1797 г., «неопределенный интеграл» – Лакруа в 1798 г., «определенный интеграл» – Лаплас в 1782 г.

Методы вычисления неопределенных интегралов, во многом разработанные Эйлером, изложены в его книге с большой полнотой. Глава I посвящена интегрированию рациональных функций, разложение которых на простые дроби изложено во «Введении в анализ бесконечных». В главе II речь идет об интегрировании иррациональностей, соответствующие подстановки также указаны ранее во «Введении». Так, сначала вычисляются интегралы вида $\int R(x,\sqrt{a+2bx+cx^2})dx$, где R – рациональная функция, с помощью подстановок Эйлера, а также интегралы от рациональных функций, зависящих от x и радикалов от дробно-рациональных функций. Далее вычисляются интегралы от биномиальных дифференциалов, т. е. $\int x^m(a+bx^n)^p dx$, где m, n, p – рациональные, в каждом из трех случаев: 1) p – целое, 2) $\frac{m+1}{n}$ – целое, 3) $\frac{m+1}{n}+p$ – целое. Эти случаи были известны еще Ньютону, как видно из его письма к Ольденбургу в 1676 г., но затем они были установлены в 1729–1730 гг. Х. Гольдбахом и Л. Эйлером

в их переписке. Эйлер высказывает утверждение, что здесь интегрирование возможно лишь в этих трех случаях. Доказательство этого утверждения было дано только в 1853 г. П. Л. Чебышёвым при условии рациональности показателей, а при условии их иррациональности – Д. Д. Мордухай-Болтовским в 1926 г. В главе III рассматривается вопрос об интегрировании с помощью рядов. Главы IV и V посвящены интегрированию трансцендентных функций. В главе IV рассматриваются интегралы вида $\int F(x)\ln f(x)dx$, где F и f – алгебраические функции, при этом используется интегрирование по частям. Интеграл $\int x^m(\ln x)^{-n}dx$ при помощи формул приведения Эйлер сводит к $\int \frac{dz}{\ln z}$, а по поводу последнего интеграла замечает: «По-видимому, это выражение представляет особый вид трансцендентных функций, которые заслуживают весьма тщательного изучения». В настоящее время функция $\mathrm{li}(x)=\int\limits_0^x \frac{dt}{\ln t} \quad (x>0,\ x\neq 1)$ называется интегральным логарифмом и играет большую роль в теории чисел: $\int\limits_2^x \frac{dt}{\ln t}=\mathrm{li}(x)-\mathrm{li}(2)$ асимптотически выражает число простых чисел, меньших x. Заменой $z=e^x$ Эйлер сводит $\int \frac{dz}{\ln z}$ к интегралу $\int \frac{e^x}{x}dx$ и разлагает последний интеграл в ряд.

Далее рассматриваются интегралы вида $\int f(x)e^{ax}dx$. Глава V посвящена интегралам, содержащим тригонометрические и обратные им функции. После Эйлера мало что добавлено в технику вычисления неопределенных интегралов.

Глава VII выделяется своим содержанием, т. к. в ней речь идет о приближенном вычислении определенного интеграла с помощью интегральных сумм, в которых Эйлер берет значения функции в левых концах

отрезков разбиения. Он подчеркивает, что вычисления будут тем точнее, чем меньше длина отрезков разбиения, но при условии, что при этом будут малыми и приращения функции на этих отрезках. Таким образом, он вплотную подходит к определенному интегралу от непрерывной функции, рассмотренному через 50 лет Коши. Но Эйлер не дает определения определенного интеграла как предела интегральных сумм. В то время было еще распространенным и представление об определенном интеграле как о сумме бесконечно большого числа бесконечно малых дифференциалов (по Эйлеру – нулей особого рода), которое Эйлер не считает точным, но полагает, что его «вполне можно сохранить», подобно тому, как «в геометрии линии мыслятся как совокупности бесчисленных точек». Точным для него было представление об определенном интеграле как о разности значений первообразной, а интегральные суммы он рассматривает как средство для приближенного вычисления интегралов. В XVIII в. не было еще современного понятия непрерывной функции, но у Эйлера был термин «непрерывная функция», имеющий совсем другой смысл. Так Эйлер называет функции, заданные единым аналитическим выражением. А разрывными он называет функции, которые заданы неодинаковыми аналитическими выражениями на разных частях области определения.

Эйлеру принадлежит вычисление огромного числа определенных интегралов. Среди них есть и такие широко используемые интегралы, которые носят имена математиков, вычисливших их уже после смерти Эйлера: $\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,dx$ (интеграл Эйлера–Пуассона), $\int\limits_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ (интеграл Дирихле), $\int\limits_0^\infty \sin x^2\,dx$ и $\int\limits_0^\infty \cos x^2\,dx$ (интегралы Френеля). Последние два интеграла он получает из интеграла $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx=\sqrt{\pi}$, переходя к комплексной переменной

$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)y$ и затем отделяя действительную и мнимую части интеграла, а также указывает соответствующий общий метод вычисления интегралов с помощью комплексной замены переменной [78, с. 163]. Преобразование Лапласа $L(f) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$ Эйлер еще в 1737 г., до рождения Лапласа, применял к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. В XVIII в. пределы интегрирования обычно выражали словами, Эйлер в 70-х гг. вводит обозначение $\int Pdx \begin{bmatrix} ab\ x = a \\ ad\ x = b \end{bmatrix}$ вместо нашей записи $\int_a^b P(x)dx$ (по-латыни *ab* означает «от», *ad* – «до»). Современное обозначение $\int_a^b f(x)dx$ впервые появляется в 1819 г. у французского математика Ж. Б. Фурье (1768–1830), и он им пользуется в своей знаменитой работе «Аналитическая теория тепла» (1822), в которой он решает уравнение теплопроводности с помощью тригонометрических рядов. Такие ряды позже были названы рядами Фурье, а их теория получила в дальнейшем глубокое развитие. В XVIII в. тригонометрические ряды нередко встречаются в работах Эйлера и других математиков. Более того, в 50-х гг. XVIII в. Эйлер, Д'Аламбер и Клеро нашли в виде определенных интегралов коэффициенты Фурье для тригонометрического ряда при исследовании вопросов небесной механики. Эйлеру принадлежит также первое исследование гипергеометрического ряда (в 1778 г.). Продолжая исследования, начатые Валлисом, Ньютоном и Стирлингом, Эйлер в ряде работ, начиная с 1730 г., разработал теорию интегралов $B(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ и $\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}dx$, названных Лежандром в 1814 г. эйлеровыми.

Название «бета-функция» и обозначение $B(p,q)$ предложил в 1839 г. Бине, а название «гамма-функция» и обозначение $\Gamma(p)$ – Лежандр в 1814 г.

Большие заслуги принадлежат Эйлеру в исследовании эллиптических интегралов, т. е. интегралов вида $\int R(x,\sqrt{P(x)})dx$, где R – рациональная функция, $P(x)$ – многочлен 3-й или 4-й степени. В 1716 г. итальянский математик граф **Джулио Карло де Тоски Фаньяно** (кратко **Фаньяно, 1682–1766)** опубликовал работу, в которой нашел формулы сложения для дуг эллипсов, гипербол и лемнискат, выразив эти дуги через эллиптические интегралы (см., например, Эрмит Ш. Курс анализа. – М.; Л.: ОНТИ, 1936. – С. 25–30). Эйлер увидел в этих формулах частные интегралы некоторых дифференциальных уравнений. Он нашел алгебраический интеграл уравнения $\frac{dx}{\sqrt{P(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{P(y)}}$, где P – многочлен 4-й степени, и изложил решение в I томе «Интегрального исчисления», ч. II, гл. VI (см. также Маркушевич А. И. Замечательные синусы. – М.: Наука, 1965, § 18–20). Позже Эйлер рассмотрел более общее уравнение $\frac{X(x)dx}{\sqrt{P(x)}}=\frac{Y(y)dy}{\sqrt{P(y)}}$, где X и Y – рациональные функции, а $P(x)=1+mx^2+nx^4$. Решая это дифференциальное уравнение, Эйлер находит теорему сложения для эллиптических интегралов всех трех родов. Выдающийся немецкий историк математики Г. Вилейтнер пишет: «Уже одного этого открытия было достаточно, чтобы увековечить его имя» [69, с. 173]. Эйлер предложил рассматривать дуги конических сечений в качестве новых трансцендентных функций и выражать через них эллиптические интегралы, подобно тому, как обычный интеграл $\int\limits_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ выражается через $\arcsin x$. В 1716 г. он показал, как это делать на примере интеграла $\int\sqrt{\frac{f+gx^2}{h+kx^2}}dx$, рассмотрев 12 случаев. В работе Эйлера, а также

в работе 1793–1794 гг. французского математика А. Лежандра (1752–1833) эллиптические интегралы были глубоко изучены. Эти исследования подготовили почву для обобщения эллиптических интегралов, открытия и глубокого изучения в XIX в. эллиптических функций, которые являются обратными к эллиптическим интегралам, подобно тому, как функция $x = \sin u$ является обратной к интегралу $u = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin x$.

В 1770 г. у Эйлера впервые появляется понятие двойного интеграла и приемы его вычисления сведением к повторному и заменой переменных. Он впервые вычислял и площадь поверхности через двойной интеграл. Позже у Эйлера встречаются и тройные интегралы. В 1773 г. Лагранж, рассматривая притяжение сфероидальных тел, пришел к тройным интегралам и рассмотрел для них, хотя и не вполне корректно, вопрос о замене переменных в случае общих криволинейных координат. Правильно вопрос о замене переменных в двойных и тройных интегралах был рассмотрен М. В. Остроградским в 1836 г. и К. Г. Якоби в 1841 г. – для интегралов любой кратности [60, т. 2, n° 359, 387].

В последнее десятилетие XVII в., как уже говорилось, происходит бурное развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений: в работах Лейбница и братьев Бернулли было рассмотрено подавляющее большинство типов дифференциальных уравнений первого порядка, допускающих квадратуры, т. е. интегрирование в конечном виде. Но затем в течение 40 лет, до Эйлера, изучение дифференциальных уравнений продвигалось медленно. Заслуживает упоминания, например, тот факт, что итальянский математик-любитель граф **Джакопо Франческо Риккати (1676–1754)** для уравнения вида $y' + a(x)y + b(x)y^2 = c(x)$, которое носит его имя, в специальном случае $a(x) \equiv 0$ и некоторых $c(x)$ нашел решение в элементарных функциях в 1724 г. В то же время этим уравнением занимались И. Бернулли, его сын Даниил, а также Х. Гольдбах, но не добились ничего существенно нового. Новое интенсивное развитие теории обыкновенных дифференциальных уравнений связано, прежде всего, с рабо-

тами Эйлера. Эта теория начала выделяться из математического анализа благодаря вкладу Эйлера и систематическому изложению ее Эйлером во второй части I тома и во II томе «Интегрального исчисления». Рассмотрим кратко основные достижения Эйлера в этой области. Его первые работы по дифференциальным уравнениям были связаны со специальным управлением Риккати (т. е. при $a(x) \equiv 0$). А в 1760–1762 гг. для общего уравнения Риккати Эйлер показал, что если известен один его интеграл v, то подстановка $y = v + \frac{1}{z}$ сводит уравнение к линейному, а если известны два частных решения, то уравнение Риккати интегрируется одной квадратурой. С Эйлера начинается изучение линейных дифференциальных уравнений высших порядков. В 1743 г. Эйлер ввел понятия общего и частного решений уравнений n-го порядка. В том же году он решил общее линейное однородное управление n-го порядка с постоянными коэффициентами с помощью подстановки $y = e^{kx}$. Уже в 1740 г. Эйлер применил метод вариации постоянной к уравнению $\frac{d^2y}{dx^2} + ky = f(x)$. Не располагая этим методом в случае уравнений более высокого порядка (для уравнений n-го порядка его дал Лагранж в 1775 г.), Эйлер приводит способ решения дифференциальных уравнений n-го порядка путем понижения порядка уравнения на единицу с помощью интегрирующего множителя e^{ax} и дальнейшим повторением этой операции. Эйлеру принадлежит систематическая разработка теории интегрирующего множителя: он установил классы дифференциальных уравнений, обладающих интегрирующим множителем заданного вида, а в 1768 г. одновременно с Д'Аламбером доказал существование интегрирующего множителя у любого обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка. Работы Эйлера, касающиеся особых решений дифференциальных уравнений, привлекли внимание Лапласа и Лагранжа к таким решениям. Общую теорию особых решений разработал Лагранж и изложил ее в 1801 г.

Эйлер свел уравнение $a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+...+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$ с переменными коэффициентами (оно носит его имя) к линейному уравнению с постоянными коэффициентами, выполнив замену $x=e^t$. Он разработал и изложил в 1768 г. носящий его имя «метод ломаных» для численного решения уравнений вида $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$. В связи с проблемами небесной механики Эйлер разработал метод приближенного решения дифференциальных уравнений первого и второго порядка путем разложения решения по степеням малого параметра и изложил его в «Интегральном исчислении» (1768, 1769). Кроме того, Эйлер широко использует для решения дифференциальных уравнений разложения в обобщенные степенные ряды и, в частности, разыскивает условия, при которых члены ряда обрываются или когда ряд можно просуммировать в виде определенного интеграла. Так он нашел, например, четырьмя способами частные решения уравнения вида $(a+bx^n)x^2\frac{d^2y}{dx^2}+(c+fx^n)x\frac{dy}{dx}+(g+hx^n)y=0$.

Отметим, что частными случаями этого уравнения являются уравнения: Бесселя, Лежандра, Чебышёва, Чебышёва–Эрмита, гипергеометрическое уравнение.

Невозможно в кратком обзоре рассмотреть многочисленные результаты Эйлера по теории дифференциальных уравнений с частными производными, играющих основную роль в математической физике. Укажем лишь, что как вывод ряда таких уравнений, так и первое исследование их выполнены Эйлером. Уравнение Лапласа $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0$ впервые встречается в 1761 г. одновременно у Эйлера и Д'Аламбера, а широкую известность оно получило после работ Лапласа (1782, 1799). В 1766 г. Эйлер предложил очень простой способ решения уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$ путем

сведения его с помощью замены $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ к уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Уже в 1759 г. он впервые рассмотрел задачу о колебаниях мембраны и свел ее к уравнению $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (опубликовано в 1766 г.). Перейдя к цилиндрическим координатам, Эйлер ищет решение полученного уравнения в виде $z = u(r) \sin \alpha t \sin \beta \varphi$ и приходит к уравнению $r^2 \frac{d^2 u}{dr^2} + r \frac{du}{dr} + [(\alpha r)^2 - \beta^2] u = 0$, называемому уравнением Бесселя, и находит его решение в виде ряда, который с точностью до числового множителя совпадает с функцией Бесселя $J_\beta(\alpha r)$. Этот результат остался незамеченным, а немецкий астроном Ф. В. Бессель (1784–1846) рассматривал аналогичное уравнение и ввел свои цилиндрические функции намного позже – в XIX в.

Эйлер является одним из основоположников теории функций комплексной переменной. Эта дисциплина выросла в «недрах» математического анализа и долго еще оставалась его ветвью. Давая определение функции во «Введении в анализ бесконечных», Эйлер добавляет, что «мнимые числа не исключаются из значений переменного количества». В одной статье 1749 г. он первым выяснил, что собой представляют логарифмы комплексных чисел. Уже в 1712–1713 гг. в переписке Лейбница с И. Бернулли обсуждался вопрос о природе логарифмов отрицательных чисел. Лейбниц считал такие логарифмы мнимыми, хотя и ничего не мог сказать определенного об их виде. А И. Бернулли утверждал, что они действительны, причем $\ln(-x) = \ln x$, поскольку $\frac{dx}{x} = \frac{d(-x)}{-x}$. В 1727–1729 гг. этот вопрос обсуждается уже в переписке Эйлера с И. Бернулли. Последний выражал свое прежнее мнение, а Эйлер указал, что из равенства $\frac{dx}{x} = \frac{d(-x)}{-x}$ следует лишь

равенство $\ln x = \ln(-x) + C$, где $C = \ln(-1)$, и аргументировал, что $\ln(-1) \neq 0$. Позже, в статье, написанной в 1749 г. и опубликованной в 1751 г., Эйлер с помощью формулы Муавра нашел общий вид логарифмов комплексных чисел, отличных от нуля, показав, что такие логарифмы имеют бесконечно много значений, отличающихся друг от друга на кратные $2\pi i$. При этом лишь для положительных чисел одно из значений логарифма действительно, а для остальных отличных от нуля чисел их логарифмы являются комплексными числами. Заметим, что не все современники Эйлера восприняли его правильное понимание логарифмов комплексных чисел. Например, Д'Аламбер поддерживал точку зрения И. Бернулли на логарифмы отрицательных чисел как в своей статье, опубликованной в 1761 г., так и в статье о логарифмах, написанной для «Энциклопедии» (1778 г.).

В 1752 г. Д'Аламбер, а в 1755–1757 гг. и Эйлер, исследуя вопрос о движении жидкости, приходят к следующей системе уравнений для компонент u и v скорости потока жидкости: $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$.

Эта система получается у них из того, что выражения $vdx + udy$ и $udx - vdy$ являются полными дифференциалами некоторых функций. Эйлер прямо рассматривает u и v как действительную и мнимую части комплексного степенного ряда по натуральным степеням аргумента, т. е. аналитической функции. Позже, в XIX в., эта система двух уравнений снова была получена Коши и Риманом уже в качестве критерия аналитичности функции комплексной переменной и сейчас называется условиями Коши–Римана.

К этой же системе Эйлер приходит снова в 1777 г., предлагая метод вычисления определенных интегралов с помощью комплексной замены переменной. Так, он полагает $\int Z(z)dz = I(z)$, где $z = x + iy$, $Z(z) = M + iN$, $I(z) = P + iQ$, тогда отделение действительной и мнимой частей в равенстве $\int (M + iN)d(x + iy) = P + iQ$ дает $\int (Mdx - Ndy) = P$,.

$\int(Ndx+Mdy)=Q$ Это означает, что $Mdx-Ndy$ и $Ndx+Mdy$ являются полными дифференциалами, следовательно, функции M и N удовлетворяют указанным выше условиям Коши–Римана. Эйлер подчеркивает, что этот результат имеет место для любой функции $Z(z)=M+iN$ (т. е. для любой аналитической функции, поскольку только с такими функциями имели дело математики XVII–XVIII вв.). Таким образом, исторически правильнее было бы называть условия Коши–Римана условиями Д'Аламбера–Эйлера. Формально заменяя в известных интегралах действительную переменную комплексной и отделяя действительную и мнимую части полученного интеграла, Эйлер вычисляет много новых определенных интегралов. Позже то же делал Лаплас. В работе, опубликованной в 1785 г., Эйлер говорит, что комплексное число $a+bi$ можно рассматривать как точку плоскости. Однако Эйлеру недостает геометрического представления операций над комплексными числами.

В XVIII в. Эйлер и Лагранж заложили основы вариационного исчисления как большой самостоятельной ветви анализа. До Эйлера было рассмотрено несколько вариационных задач. Первой из них была изопериметрическая задача, которую решал во II в. до н. э. древнегреческий математик Зенодор. В Новое время самую первую вариационную задачу поставил Ньютон в одном из замечаний в «Математических началах натуральной философии»: найти тело вращения, которое при движении вдоль оси вращения в жидкости или газе испытывает наименьшее сопротивление. Ньютон приводит лишь аналог дифференциального уравнения в виде пропорции для сечения тела, в 1699 г. эту задачу решили Лопиталь и И. Бернулли, а еще позже – один анонимный современник Ньютона. Но эта задача не вызвала заметного резонанса среди математиков. Знаменитой задачей вариационного исчисления была предложенная И. Бернулли в 1696 г. в качестве вызова математикам задача о брахистохроне, которую, кроме И. Бернулли, решили Я. Бернулли, Лейбниц, Ньютон, Лопиталь, а в 1699 г. – швейцарский математик Ф. де Дуйе. Этой задачей обычно датируют возникновение вариационного

исчисления. В 1697 г. Я. Бернулли ставит и решает одну изопериметрическую задачу, отличную от античной. Она была предметом длительного спора братьев Бернулли относительно правильности ее решения. В результате выяснилось, что решение Я. Бернулли было верным, а два ее решения И. Бернулли – ошибочными. В 1697 г. И. Бернулли поставил и решил задачу о геодезических на выпуклых поверхностях. Но пока все это были лишь отдельные задачи и не было общего подхода к их решению.

Приоритет в общей постановке задач вариационного исчисления и создании общего метода их решения всецело принадлежит Эйлеру. В создании основ вариационного исчисления его роль сходна с ролью Ньютона и Лейбница по созданию основ математического анализа. С 1726 г. Эйлер публикует ряд статей, посвященных вариационным задачам. Итогом этих 15-летних исследований явился знаменитый трактат Эйлера «Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума либо минимума...», опубликованный в 1744 г. Задача вариационного исчисления здесь ставится в общем виде: среди кривых $y = y(x)$, проходящих через заданные точки a и b, найти такую кривую, которая доставляет экстремум интегралу (функционалу) $J(y) = \int_a^b Z\left(x, y, \frac{dy}{dx}, ..., \frac{d^n x}{dx^n}\right) dx$. Это была первая общая постановка задачи вариационного исчисления, так называемая задача с закрепленными концами. После Эйлера задача вариационного исчисления обобщалась на функционалы при иных условиях на кривые $y = y(x)$, связывающих $y(x)$ и ее производные, и притом в многомерном случае. Эйлер вводит аналог понятия вариации функционала, называя ее «дифференциальным значением». В качестве общего метода решения поставленной задачи Эйлер предлагает свой «метод ломаных». Его идея заключается в следующем. Для простоты предположим, что подынтегральная функция Z зависит лишь от x, y, y'. Эйлер заменяет кривые $y = y(x)$ последовательностью приближающих решение (экстремаль) ломаных с вершинами в точках

(x_k, y_k), где $x_k = a + k\Delta x$, $\Delta x = \frac{b-a}{n}$, $k = 0,\ 1,\ \dots,\ n$. При этом интеграл J заменится суммой $J_n(y_0, y_1, \dots, y_n) = \sum_{k=0}^{n-1} Z\left(x_k, y_k, \frac{y_{k+1} - y_k}{\Delta x}\right)\Delta x$, и вопрос сводится к исследованию обыкновенного экстремума функции J_n от переменных $y_0,\ y_1,\ \dots,\ y_n$. Здесь каждое y_ν входит в два соседних слагаемых суммы. Придавая y_ν бесконечно малое приращение, Эйлер вычисляет дифференциал суммы по переменной y_ν и в результате приходит к необходимому условию экстремума функционала $J(y) = \int_a^b Z(x, y, y')dx$ в виде $N - \frac{dP}{dx} = 0$, где $N = Z_y$, $P = Z_{y'}$, т. е. к уравнению $Z_y - \frac{d}{dx}Z_{y'} = 0$, которое носит его имя. Для функционала $J(y) = \int_a^b Z(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})dx$ он аналогично получает уравнение $Z_y - \frac{d}{dx}Z_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}Z_{y''} - \dots = 0$. Свой общий метод Эйлер иллюстрирует на более чем 60 примерах. Изложение Эйлером этого метода не было строгим, в дальнейшем оно было усовершенствовано немецким математиком А. Кнезером (1862–1930). Метод Эйлера явился первым из серии так называемых «прямых методов» в вариационном исчислении, они были широко разработаны в XX в. Имеется русский перевод 1934 г. указанной работы Эйлера.

Подробнее об истории вариационного исчисления до Эйлера включительно см. статью К. А. Рыбникова «Первые этапы развития вариационного исчисления» [21, 1949, вып. 2, с. 355–498]. О дальнейшем его развитии: [109, ч. 3].

Теория чисел как наука впервые оформилась в трудах Эйлера, он посвятил ей около 150 работ. Укажем главные из его достижений в этой

области. Как уже упоминалось, великий французский математик П. Ферма (1601–1665) в заметках на полях экземпляра «Арифметики» Диофанта и в письмах сформулировал много теорем, оставив их без доказательства. Знаменитый математик П. Л. Чебышёв (1821–1894), много сделавший также в теории чисел, писал: «Открытия Ферма служили только вызовом геометрам на изыскания в теории чисел. Но, несмотря на весь интерес этих изысканий, до Эйлера на них никто не вызывался. И это понятно; эти изыскания требовали не новых приложений приемов уже известных и не новых развитий приемов, прежде употреблявшихся; эти изыскания требовали новых приемов, открытия новых начал, одним словом, основания новой науки. Это было сделано Эйлером» [93, с. 58]. Эйлер доказал почти все теоремы Ферма, а при $n = 3$ и его Великую теорему, утверждающую, что при натуральных $n \geq 3$ и $xyz \neq 0$ уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений в целых числах. Эйлером была доказана и малая теорема Ферма: если p – простое число и a не делится на p, то $a^{p-1} - 1$ делится на p, т. е. $a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$ (такого вида записи введены Гауссом в 1801г. и называются сравнениями). Эйлер ввел функцию $\varphi(m)$, $m \in \mathbb{N}$, которая носит его имя. Это число натуральных чисел, не превосходящих m и взаимно простых с m, причем $\varphi(1) = 1$ по определению. Он же дал следующее обобщение малой теоремы Ферма: если a и m>1 взаимно простые, то $a^{\varphi(m)} - 1$ делится на m, т. е. $a^{\varphi(m)} = 1(\mathrm{mod}\, m)$, где $\varphi(m)$ – функция Эйлера. Теорема Эйлера превращается в малую теорему Ферма в случае, когда $m = p$ есть простое число. Эйлер создал основы теории степенных вычетов и глубоко изучил квадратичные вычеты, он же ввел в 1760 г. и сами термины «вычет», «невычет». Число a называется квадратичным вычетом по модулю p, если существует такое целое x, что $x^2 \equiv a (\mathrm{mod}\, p)$, в противном случае a называется квадратичным невычетом по модулю p. Важен случай простых $p \neq 2$. Эйлер установил критерий

квадратичности вычета: вычет x является квадратичным по модулю p тогда и только тогда, когда $x^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1(\operatorname{mod} p)$. В 1782 г. Эйлер нашел, но не смог доказать центральный в этой теории закон взаимности. Его удобно формулировать с помощью введенного в 1798 г. французским математиком А. Лежандром символа $\left(\frac{a}{p}\right)$ (читается «a над p»), который определяется следующим образом: $\left(\frac{a}{p}\right)=1$ в случае, когда сравнение $x^2 \equiv a(\operatorname{mod} p)$ разрешимо, и $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$ в противном случае. Закон взаимности утверждает, что если p и q – два различных нечетных простых числа, то $\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{q}\cdot\frac{q-1}{p}}$. Гениальный немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777–1855) назвал этот закон «фундаментальной», или «золотой», теоремой, неоднократно к ней возвращался и дал семь ее доказательств (одно из них в модифицированном виде см., например, в [71, с. 159–171], а также в учебнике: Сушкевич А. К. Теория чисел. – Х.: Изд-во ХГУ, 1956. – § 49). А всего к настоящему времени было дано более 150 доказательств закона взаимности, его обобщили: на биквадратные вычеты – Гаусс, на кубические – его ученик Ф. Эйзенштейн (1823–1852), на поля деления круга – немецкий математик Э. Куммер (1810–1893), на любые поля алгебраических чисел – русский математик И. Р. Шафаревич в 1950 г. Исследования Эйлера, посвященные ζ-функции, положили начало аналитическому направлению в теории чисел, получившему дальнейшее развитие в XIX в. в работах П. Л. Чебышёва и Б. Римана.

Целый ряд работ Эйлера посвящен решению неопределенных уравнений в целых и рациональных числах, т. е. диофантову анализу. Эйлер систематизировал и обобщил во II томе своей книги «Алгебра» (1770) все,

что было известно, начиная от Диофанта (III в.) и Ферма (XVII в.), о решении в рациональных числах уравнений вида $y^2 = f_2(x)$, $y^2 = f_3(x)$, $y^2 = f_4(x)$, $y^3 = f_3(x)$, где $f_i(x)$ – многочлен i-й степени ($i = 2, 3, 4$). Эйлер рассматривал и вопрос о решении в целых числах уравнений $ax^2 + 1 = y^2$ и $ax^2 + b = y^2$, где a и b – целые числа, причем a не является квадратом. Получая теоремы сложения для эллиптических интегралов, он заодно устанавливает возможность нахождения новых рациональных точек на эллиптических кривых по уже известным. Например, в случае кривой Γ, заданной уравнением $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, теорема сложения Эйлера утверждает, что если $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ – точки кривой Γ, то существует точка $C(x_3, y_3)$ на Γ такая, что $\int_{x_0}^{x_1} \frac{dx}{y} + \int_{x_0}^{x_2} \frac{dx}{y} = \int_{x_0}^{x_3} \frac{dx}{y}$, причем координаты точки C являются рациональными функциями от координат точек A и B. В случае рациональных A и B теорема дает еще две рациональные точки на Γ: одна из них C совпадает с точкой пересечения секущей AB с кривой Γ (как и у Диофанта), а вторая $\bar{C}$ симметрична точке C относительно оси Ox. Находя точки пересечения секущих $A\bar{C}$, $B\bar{C}$ с кривой Γ и отражая эти точки, получаем новые рациональные точки на Γ и т. д. Таким образом, Эйлер дополнил «метод секущих» Диофанта операцией отражения относительно оси симметрии эллиптической кривой. Пуанкаре в 1901 г. ввел сложение рациональных точек на Γ, полагая $A + B = \bar{C}$.

Дальнейшее глубокое изучение структуры рациональных точек на эллиптических кривых проведено в работе немецкого математика К. Г. Якоби (1834) и мемуаре французского математика А. Пуанкаре (1901), о чем уже упоминалось в очерке о Диофанте на с. 49 ч. 1 пособия. Подробнее об этих вопросах см. статью И. Г. Башмаковой «Вклад Эйлера в алгебру» [97, с. 139–152], ее книгу [41, § 10–13]; статью Т. А. Лавриненко

«Диофантовы уравнения в работах Л. Эйлера» [97, с. 53−165]. Эйлер исследовал восходящие к Ферма вопросы, связанные с представлением простых чисел квадратичными формами. Немецкому математику Х. Гольдбаху (1690–1764) и Эйлеру принадлежит постановка так называемой аддитивной проблемы теории чисел: всякое четное число $n \geq 4$ является суммой двух простых чисел, а нечетное $n \geq 7$ – суммой трех простых чисел.

Важное место в творчестве Эйлера занимают вопросы, относящиеся к аналитической и дифференциальной геометрии. На с. 130 уже упоминалось о его классификации кривых 2-го, 3-го и 4-го порядков во II томе «Введения в анализ бесконечных». Там же у него уже имеются формулы поворота осей координат на угол φ. До Эйлера лишь отдельные уравнения поверхностей встречаются у некоторых математиков. В одной работе А. К. Клеро (1731) приведены примеры поверхностей 2-го порядка в каноническом виде без всякой систематизации; целью его работы было исследование некоторых пространственных кривых как пересечений поверхностей. Но лишь Эйлер впервые систематически рассмотрел поверхности 2-го порядка и дал их классификацию в довольно обширном «Приложении о поверхностях» ко II тому «Введения в анализ бесконечных» (1748). Вначале он рассматривает весьма общие классы поверхностей: $z = \varphi(y)$ (цилиндрические), $\frac{z}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ (конические), $z = \varphi(x^2 + y^2)$ (поверхности вращения). Затем приводит формулы перехода от одной пространственной прямоугольной системы координат к другой. Далее идет систематическое изучение поверхностей 2-го порядка. Из общего их уравнения Эйлер сначала берет сумму членов 2-го порядка («асимптотический конус») и исследует условия его действительности и вырождения. Без проведения всех необходимых выкладок он показывает, что общее уравнение 2-го порядка может быть приведено к основному виду, а далее дает классификацию всех канонических типов поверхностей 2-го порядка. В частности, он открыл неизвестную ранее поверхность 2-го порядка − гиперболический параболоид («седло»). «Приложение» заканчивается главой о пересе-

чениях поверхностей. В частности, показывается, что при исключении одной из переменных в системе уравнений двух поверхностей, дающих кривую, получается уравнение проекции этой кривой на соответствующую координатную плоскость. Таким образом, Эйлер является одним из главных творцов аналитической геометрии, у него она приобрела вид, близкий к современному.

Меньше Эйлер занимался вопросами дифференциальной геометрии, но и здесь у него имеются важные результаты. Еще до создания основ вариационного исчисления Эйлер рассматривал вопрос о геодезических. Большая его работа, опубликованная в 1767 г., посвящена исследованию кривизны сечений поверхностей плоскостями. Мы говорим, как принято сейчас, о кривизне, а Эйлер рассуждает в терминах радиуса кривизны, т. е. величины $R = \frac{1}{k}$, обратной кривизне. Он впервые рассматривает нормальные сечения поверхностей, т. е. линии пересечения поверхностей плоскостями, проведенными через нормаль к поверхности. При этом он находит, что в каждой точке поверхности существуют нормальные сечения с наибольшей и наименьшей кривизнами (главными кривизнами) и что плоскости этих сечений ортогональны. Его имя носит найденная им формула связи между кривизной k любого нормального сечения и главными кривизнами k_1 и k_2. В работе, опубликованной в 1772 г., Эйлер вводит определение развертывающихся поверхностей, т. е. линейчатых поверхностей, которые посредством изгибания могут быть наложены на плоскость. Здесь же он получает условия развертывания. В 1774 г. Эйлер начал изучать пространственные кривые, записывая их натуральными уравнениями $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = z(s)$, где s – длина дуги кривой.

Знаменитая теорема Эйлера о многогранниках относится уже к топологии и позже получает в этой науке глубокое обобщение. Эйлер в 1750 г. обнаружил, а в 1758 г. доказал, что для всех выпуклых многогранников выполняется равенство $В - Р + Г = 2$, где $В$ – число вершин, $Р$ – ребер, $Г$ –

граней многогранника. В топологии число $\chi(K)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\alpha_{i}$ называется эйлеровой характеристикой n-мерного топологического комплекса K, где α_i – размерность i-й клетки комплекса. В бумагах Декарта, относящихся к 1620 г., имеется найденное им соотношение вида $П=2Г+2T-4$ между числом $П$ плоских углов, граней $Г$ и телесных углов T выпуклого многогранника. В этом соотношении в неявном виде уже содержится формула Эйлера, т. к. $П=2P$, $T=B$. Однако Декарт не мыслил в терминах вершин, ребер и граней, а лишь Эйлер выразил своей формулой зависимость между этими 0-мерными, 1-мерными и 2-мерными частями многогранника, что открывало путь к дальнейшим обобщениям в топологии. Эйлерова характеристика является топологическим инвариантом, т. е. не меняется при непрерывных преобразованиях комплексов, в частности, многогранников. История попыток ряда выдающихся математиков XVII–XIX вв. получить обобщения формулы Эйлера на многогранники более общие, чем выпуклые, в увлекательной форме изложена в книге: Лакатос И. Доказательства и опровержения (Как доказываются теоремы). – М.: Наука, 1967. − 152 с. Отметим, что топологический характер имеет и задача о семи кёнигсбергских мостах, неразрешимость которой доказал Эйлер.

В элементарной геометрии известны: прямая Эйлера (на ней лежат точка пересечения медиан, точка пересечения высот и центр описанной окружности), окружность Эйлера девяти точек (на ней лежат середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами треугольника). Имя Эйлера носят числа E_n – коэффициенты разложения $\frac{1}{chx}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E_n}{n!}x^n$, они связаны также с числами Я. Бернулли B_n – коэффициентами разложения $\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}t^n$. В механике движение твердого тела вокруг неподвижного центра описывает-

ся с помощью трех эйлеровых углов. А уравнения движения Лагранжа I и II рода в механике уже встречаются у Эйлера.

Творчество Эйлера поражает своей универсальностью. Кроме математики и механики, он много занимался астрономией (построил две теории движения Луны), кораблестроением и навигацией, картографией. Его сочинения по оптике составляют 7 томов, в том числе 3 тома «Диоптрики», которую он писал уже почти полностью слепым. «Письма к немецкой принцессе» (3 тома, 1768–1774) Эйлера представляют популярное освещение вопросов физики, философии, логики, этики, теологии и теории музыки. Это произведение Эйлера много раз издавалось. Отметим, что при изложении сведений по логике Эйлер вводит здесь круговые диаграммы для выражения логических ситуаций. Усовершенствованные логические диаграммы позже ввел английский логик Джон Венн (1834–1923). За свои конкурсные работы Эйлер получил 14 премий Парижской АН, это рекордное число. Он оказал большое влияние на развитие математического просвещения в России. Современники Эйлера, в том числе его ученик и ассистент Н. Фусс, отмечая необыкновенную работоспособность Эйлера, указывают на многие приятные черты его характера: ровное настроение, бодрость, умение снять с себя ученый вид и скрыть свое превосходство, внимательное отношение к коллегам, добродушную насмешливость, а также умение наивно и забавно рассказывать. Пользуясь огромным авторитетом, Эйлер много сделал для нормализации обстановки в научной сфере XVIII в., полной ссор и взаимной нетерпимости. Об Эйлере: [92–97], а также [73; 74; 69; 1, т. 3].

Даниил Бернулли

Даниил Бернулли (1700–1782), сын Иоганна Бернулли, был одним из крупнейших физиков и математиков своего времени. В 1725–1733 гг. он работал в Петербургской АН, а затем в Базеле. С Эйлером он вел оживленную переписку. Уже в молодости Даниил занимался уравнением Риккати и опубликовал в 1724 г. свои результаты о случаях интегрируемости

этого уравнения методом разделения переменных. В 1728 г. Д. Бернулли первым нашел формулу (в его записи) $\left(1+\frac{1}{A}\right)^A = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+$ и т. д., где $A=\infty$.

Сейчас мы ее записываем в виде $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$. Обозначение e принадлежит Эйлеру, как и общая формула $e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$, которую он также писал без знака $\lim_{n\to\infty}$, считая, что n – бесконечно большое число. Решая задачу о малых колебаниях однородного тяжелого подвешенного каната, Д. Бернулли около 1740 г. приходит к дифференциальному уравнению $nx\frac{d^2y}{dx^2}+n\frac{dy}{dx}+y=0$ и находит его решение в виде ряда $y=1-\frac{x}{n}+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^2-\frac{1}{4\cdot 9}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^3+\frac{1}{4\cdot 9\cdot 16}\cdot\left(\frac{x}{n}\right)^4-\ldots$, который представляет собой функцию $J_0\left(2\sqrt{\frac{x}{n}}\right)$, названную позже функцией Бесселя, рассмотревшего более общее уравнение. Д. Бернулли одним из первых начал изучать тригонометрические ряды, опубликовал в 1755 г. решение уравнения колебаний струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в виде $u=\alpha_1\sin\frac{\pi x}{l}\cos\frac{\pi t}{l}+\alpha_2\sin\frac{2\pi x}{l}\cos\frac{2\pi t}{l}+\ldots$. О споре относительно природы произвольных функций, представляющих начальные условия и решение этого уравнения, речь будет в следующем очерке. В 1771 г. Д. Бернулли для некоторого вида колеблющихся рядов пришел к обобщенному методу суммирования с помощью средних арифметических $\frac{1}{n}\left(S_0+S_1+\ldots+S_{n-1}\right)$ частичных сумм ряда. В общем виде этот метод суммирования разработал лишь в 1890 г. итальянский математик

Э. Чезаро (1859–1906), чьим именем он и называется. Д. Бернулли нашел также обобщенные суммы рядов $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos nx$. Ему принадлежат и результаты вычисления обычных сумм некоторых тригонометрических рядов. В 1773 г. он привел разложение $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\frac{\pi-x}{2}$, справедливое на интервале $(0;2\pi)$, и отметил, что сумма этого ряда, будучи 2π-периодической, терпит скачки в точках вида $2k\pi$. Он получает и разложение

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n}=\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2\cdot(1-\cos x)},\ 0<x<2\pi.$$

Путем почленного интегрирования ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ он суммирует ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^2}$, а затем ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^5}$, но без исследования сходимости и законности интегрирования.

На протяжении 1733–1778 гг. Д. Бернулли опубликовал 7 мемуаров по теории вероятностей и ее приложениям к демографии. В работах 1768 г. и 1770 г. он впервые применил дифференциальные уравнения в теории вероятностей, а в работе 1771 г. применил аналог интегральной теоремы Муавра–Лапласа и привел первую небольшую таблицу нормального распределения вероятностей. В алгебре ему принадлежит метод приближенного решения алгебраических уравнений с помощью замены их конечно-разностными уравнениями, представляющими рекуррентные соотношения для последовательных приближений. Ряд результатов Д. Бернулли получил в механике движения тел. Но особенно большое значение сыграл главный труд его жизни – трактат «Гидродинамика» (1738), над которым он работал 10 лет. Содержание этого большого труда подробно изложено в [91], а более кратко – в [90, с. 164–167]. Укажем лишь, что в «Гидродинамике» Д. Бернулли детально исследует движение однородных и неоднородных жидкостей

в конечных и бесконечных трубах и сосудах с отверстиями и перегородками и без них, излагает теорию движения упругих жидкостей, а также воздуха и др. Имя Д. Бернулли носит одна из главных теорем гидродинамики. В 1742 г. его отец Иоганн Бернулли опубликовал свою книгу «Гидравлика». Относя содержащиеся в ней результаты еще к 1732 г., он приводит здесь многие из результатов Д. Бернулли как свои, но излагает их более удобно и в более общем виде. Разразился резкий спор между отцом и сыном о приоритете, арбитром в этом споре выступал Эйлер. Завершая очерк о творчестве Д. Бернулли, отметим еще, что он получил 10 премий Парижской АН, из них 9 – за сочинения по вопросам, связанным с навигацией, и одно – за сочинение по астрономии. Большее количество премий в XVIII в. получил только Эйлер. О Д. Бернулли: [90; 91].

Клеро

Знаменитый французский математик и астроном **Алексис Клод Клеро (1713–1765)** родился в Париже в семье профессора математики. Алексис был вторым ребенком в семье, в которой, кроме него, родилось 20 детей. Образование получил у своего отца и очень рано пристрастился к чтению книг по математике. В 9 лет начал читать книгу Гинэ «Приложения алгебры к геометрии», содержавшую также и основы анализа. К 10 годам он прочел ее три раза и многие задачи решил проще, чем автор книги. Таким же способом он изучил книги Лопиталя «Аналитический трактат о конических сечениях» и «Анализ бесконечных малых». В 12 лет Алексис выступил с докладом в Парижской АН на тему об исследовании четырех открытых им кривых 4-го порядка. Академики проэкзаменовали его по этим вопросам и были поражены тем, что он это сделал сам. Работа была напечатана с подтверждением академиков, что автору 12 лет. В 16-летнем возрасте он получает свои результаты по исследованию пространственных кривых, а в 18 лет публикует работу «Исследования о кривых двоякой кривизны» (1831). Здесь впервые опубликованы уравнения большинства поверхностей

вращения кривых 2-го порядка. Пространственные кривые он получает как пересечения поверхностей. У него впервые приведено общее уравнение плоскости в пространстве. В 18-летнем возрасте Клеро был избран в Парижскую АН. Это был единственный случай, когда пришлось специальным указом короля нарушить пункт устава академии о не менее чем 20-летнем возрасте баллотирующихся в нее кандидатов. В 1736–1737 гг. экспедиция под руководством Мопертюи измеряла земной меридиан за Полярным кругом. Как личный друг руководителя и очень способный математик, Клеро в возрасте 23 лет принимал в ней участие.

В 1715 г. Тейлор впервые нашел решение одного дифференциального уравнения, не содержащееся в общем решении. Он назвал это решение «особым» (singularis), но не увидел в нем нарушения единственности. В 1734 г. Клеро публикует работу об особых решениях дифференциальных уравнений. Он первым приводит здесь несколько примеров дифференциальных уравнений первого порядка с особыми решениями. В частности, он рассматривает уравнение $dy^2-(x+1)dydx+ydx^2=0$, т. е. $y'^2-(x+1)y'+y=0$, и впервые обнаруживает, что особое решение этого уравнения является огибающей семейства прямых. Это пример уравнения вида $y=xy'+\varphi(y')$, которое потом было названо уравнением Клеро. Но у Клеро еще нет теории особых решений, ее впервые дал Лагранж в 1774 г. Почти одновременно с Эйлером в 1739 г. Клеро вводит понятие полного дифференциала $du=Pdx+Qdy$ и приводит необходимое для этого условие в виде $\frac{dP}{dy}=\frac{dQ}{dx}$, используя «прямое» d и для частных производных. В замечательной книге «Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики» (1743) Клеро, в частности, впервые вводит криволинейный интеграл II типа и утверждает, что для независимости его от пути интегрирования необходимо, чтобы подынтегральное выражение было полным дифференциалом. В работе 1757 г. о возмущениях планет Солнцем Клеро впервые в общем

виде ставит вопрос о разложении четной функции в ряд по косинусам и выражает в виде определенных интегралов, хотя и с помощью довольно сложных рассуждений, коэффициенты этого ряда, названные впоследствии коэффициентами Фурье. Клеро получил две премии Петербургской АН: за свою книгу «Теория движения Луны» (1751) и за расчет орбиты кометы Галлея и весьма точное предсказание места и времени ее появления в 1758 г.

Ученица Мопертюи и Клеро, француженка маркиза **Габриель Эмили дю Шатле (1706–1749)** занималась математикой и физикой, в 1745 г. перевела на французский язык «Математические начала натуральной философии» Ньютона, что сыграло важную роль в ознакомлении французских ученых с механикой Ньютона. Была в дружеских отношениях с французским писателем и философом Вольтером. О Клеро: [73, с. 200–207; 69; 1, т. 3, с. 160–162].

Д'Аламбер

Современником Л. Эйлера и Д. Бернулли был выдающийся французский математик и механик **Жан ле Рон Д'Аламбер (1717–1783)**. Внебрачный сын маркизы-писательницы и артиллерийского генерала, он был по воле матери сразу после рождения подкинут на ступени парижской церкви Св. Жана Круглого. Именем этого святого он и был назван. Вернувшийся из-за границы отец разыскал ребенка и отдал на воспитание кормилице мадам Руссо, жене стекольщика. С 4 до 13 лет Жан ле Рон воспитывался в пансионе, где его навещал отец. Но когда Жану ле Рону исполнилось 10 лет, его отец умер, завещая ему небольшую пенсию и оставив его на попечение своих родственников. Д'Аламбер окончил Коллеж Мазарини, Академию юридических наук, но профессия адвоката его не привлекала, он стал изучать медицину и урывками занимался математикой. Он снова поселяется в семье своей приемной матери Руссо, ведет простой и скромный образ жизни и всецело посвящает себя занятиям математикой, которую он изучает самостоятельно. Парижская АН избирает его в 1741 г. адъюнктом по астрономии после того,

как он представил туда две работы о движении твердых тел в жидкостях. В 1743 г. Д'Аламбер публикует свой знаменитый «Трактат о динамике», где, в частности, излагает носящий его имя «принцип равновесия», который позволяет решать задачи динамики сведением их к задачам статики [214, с. 98–100]. В 1744 г. выходит книга Д'Аламбера «О равновесии и движении жидкостей». Здесь он опровергает ряд положений «Гидродинамики» Д. Бернулли и развивает гидродинамику в некоторых вопросах дальше. Д. Бернулли был возмущен критикой молодого французского ученого. Они так и не нашли общего языка и не переписывались друг с другом. Кроме того, более чем 20-летняя переписка Эйлера с Д. Бернулли нарушилась после того, как Эйлер стал переписываться с Д'Аламбером, и восстановилась лишь через несколько лет.

XVIII век называют веком Просвещения, т. к. в это время наибольшего размаха получило идейное течение, связанное с борьбой нарождавшейся буржуазии против феодализма. Представители этого течения большую роль в деле установления нового порядка отводили широкому распространению знаний. Крупным событием во Франции явилось издание в 1751–1780 гг. грандиозной 28-томной «Энциклопедии, или Толкового словаря наук, искусств и ремесел» (эти тома имели формат 41×27 см). Идейными вдохновителями и редакторами «Энциклопедии» были философ-материалист, писатель Д. Дидро (1713–1784) и Д'Аламбер, который вел в ней отделы математики, механики и физики. Кроме того, Д'Аламбер написал для «Энциклопедии» обширное предисловие и огромное число статей по философии, истории, литературе и др. (уже в первом томе было около 100 его статей). Отдельные статьи Д'Аламбера подверглись нападкам духовенства и властей, вследствие чего после выхода 7-го тома в 1757 г. он вынужден был выйти из состава редакции, хотя и остался сотрудником коллектива «Энциклопедии». Позже математические статьи «Энциклопедии» были собраны в «Методической энциклопедии» в отделе «Математика». Сотрудничая в «Энциклопедии», Д'Аламбер не прекращает своих занятий математикой, механикой и астро-

номией. В 1752 г. выходят его «Исследования по интегральному исчислению» и работа по теории сопротивления жидкостей, а в 1756 г. – трехтомная монография по небесной механике «О системе мира». В 1761–1780 гг. мемуары Д'Аламбера по чистой и прикладной механике, математической физике, астрономии, оптике и др. точным наукам были изданы в 8-томном сборнике «Математические сочинения».

Д'Аламбер очень решительно выступал за обоснование математического анализа с помощью понятия предела, что нашло яркое выражение в ряде его статей «Предел», «Флюксия», «Дифференциал», «Бесконечно малое», «Последовательность, или ряд» и др., помещенных в «Энциклопедии». Как уже говорилось, в ответ на критику Беркли в Англии на защиту основ дифференциального исчисления выступили Робинс и Маклорен. Во Франции первым из активных сторонников метода пределов Ньютона был Д'Аламбер. Уже в «Трактате о динамике» (1743) Д'Аламбер писал: «Метод бесконечно малых есть не что иное, как метод первых и последних отношений, другими словами, отношений рождающихся или исчезающих величин». Аббат де ла Шапелль (1710–1792), королевский цензор в Париже, знакомый с Д'Аламбером, кратко изложил теорию пределов в «Основаниях геометрии» (1746). Ссылаясь на Ньютона и Д'Аламбера, он пишет, что истинные принципы дифференциального исчисления независимы от метода неделимых, а метод исчерпывания он рассматривает как метод пределов. Он приводит следующее определение: «Говорят, что одна величина является пределом другой величины, если вторая может приблизиться к первой ближе, чем на любую данную величину, сколь бы малой ее не предположить. Таким образом, разность между величиной и ее пределом абсолютно неопределима». Ла Шапелль впервые приводит теоремы о единственности предела и о пределе произведения двух или нескольких переменных [130, с. 41–42]. В «Энциклопедии» в статье «Предел», написанной совместно ла Шапеллем и Д'Аламбером, приводится это же определение предела, но в конце первой фразы добавлены слова «без того, однако, чтобы приближающаяся величина могла когда-либо

превзойти величину, к которой она приближается». Приведены также и указанные выше две теоремы о пределах. Добавленные в определении предела слова указывают на то, что имеется в виду односторонний предел. А содержащееся ниже в статье разъяснение и примеры показывают, что речь идет о пределах монотонных величин, не принимающих значения своего предела [3, с. 155– 156]. Таким образом, в статье «Предел» нет ничего нового по сравнению с определением предела у Робинса, который к тому же указывает, что предел есть постоянная величина. Однако главное не в этом, а в содержащемся в статье утверждении Д'Аламбера о том, что «теория пределов есть основание истинной метафизики дифференциального исчисления». В статье «Дифференциал» Д'Аламбер выступает против понимания дифференциального исчисления только как исчисления бесконечно малых и дифференциалов, акцентирует на понятии предела. В статье «Флюксия» Д'Аламбер выступает против того, чтобы давать определение флюксии (т. е. производной, по терминологии Ньютона) с помощью понятия скорости, и указывает, что само понятие скорости неравномерного движения и флюксии требует определения с помощью понятия предела [3, с. 157]. У Д'Аламбера не было четкого представления о сходимости ряда в современном смысле, когда сумма ряда определяется как предел частичных сумм. Но он решительно выступал за использование только «хороших и неошибочных» рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, т. е. таких, у которых $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$ для всех n или начиная с некоторого n. Он не замечал, однако, что это условие выполняется, например, и для гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, расходимость которого показал уже Орем, а затем Иоганн и Якоб Бернулли. Д'Аламбер дает, таким образом, носящий его имя признак сходимости ряда, хотя и в некорректной форме. Впервые правильно сформулировал и доказал в предельной форме этот признак (заодно со своим радикальным признаком) Коши в «Алгебраическом анализе» (1821). Д'Аламбер впервые нашел интервал сходимости $-1 < x < 1$

биноминального ряда $(1+x)^{\alpha}$. В I томе трехтомника «О системе мира» (1754) он получает, хотя и не строго, «формулу Тейлора» с остаточным членом в виде n-кратного интеграла. Одним из первых Д'Аламбер умел находить коэффициенты Фурье разложения функции в тригонометрический ряд, как показывает его разложение функции $(1-n\cos\varphi)^{-s}$ по косинусам во II томе указанного выше труда. Почти в то же время, задолго до Фурье, коэффициенты Фурье находили Эйлер и Клеро. В мемуаре об интегральном исчислении (1748) Д'Аламбер занимается вопросами интегрирования рациональных функций и иррациональностей, приведением некоторых эллиптических интегралов к уже известным тогда формам, а также задачей о выражении дуги любого конического сечения через дугу другого конического сечения. Здесь же Д'Аламбер впервые дал, хотя и не вполне строгое, доказательство основной теоремы алгебры о существовании корня алгебраического многочлена, его схема приведена в [1, т. 3, с. 72–74]. В 1751 г. доказательство основной теоремы алгебры дал Эйлер [2, с. 88–94]. Сейчас она уже не считается основной теоремой алгебры.

Д'Аламберу принадлежит ряд важных результатов в теории дифференциальных уравнений – обыкновенных и в частных производных, он является одним из главных основоположников математической физики. Он разработал метод множителей для интегрирования линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений и неоднократно его использовал [21, 1956, вып. 9]. В 1768 г. Д'Аламбер одновременно с Эйлером доказал существование интегрирующего множителя у всякого обыкновенного дифференциального уравнения. Французский математик и астроном А. К. Клеро (1713–1765) в 1734 г. для уравнения $y = xy' + \varphi(y')$, которое носит его имя, нашел особое решение. Под влиянием работы Клеро Д'Аламбер в 1748 г. нашел особое решение уравнения $y = x\varphi(y') + \psi(y')$. Это уравнение носит имя Лагранжа, но было бы правильнее называть его именем Д'Аламбера или Иоганна Бернулли.

Задача о колебании струны впервые рассматривалась Тейлором в 1713 г., а после опубликования работы И. Бернулли «О колеблющихся струнах» (1728) она привлекла внимание многих математиков. Д'Аламбер в работе, опубликованной в 1749 г., выводит уравнение колебаний струны в виде $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и решает его. Заменой $\tau = at$ он переходит к уравнению $\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, которое записывается в виде $\frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)}{\partial \tau} = \frac{\partial\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x}$, а затем, используя условие полного дифференциала, получает общее решение в виде $u = \varphi(at + x) + \psi(at - x)$, при этом функции φ и ψ он считал произвольными аналитическими. Далее он находит решение, отвечающее краевым условиям $u(0,t) = 0$, $u(l,t) = 0$. В следующем году Эйлер добавил к краевым условиям начальные условия: $u(0,x) = f(x)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = g(x)$. При этом Эйлер считал, что начальные функции f и g, задающие начальное положение струны и начальные скорости ее точек, можно брать и не аналитические, а «склеенные» из аналитических или даже начерченные свободным движением руки. Д'Аламбер же считал, что в качестве f и g можно брать лишь аналитические функции, т. к. для «склеенных» функций не везде может существовать производная. Разгорелся знаменитый спор о природе функций, входящих в начальные условия и решения дифференциальных уравнений с частными производными, продолжавшийся около трех десятилетий. В 1755 г. в спор включился Д. Бернулли, который, как уже было сказано при рассмотрении его творчества, дал общее решение задачи о колебании струны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ в виде тригонометрического ряда $u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{k\pi x}{l} \cos\frac{k\pi t}{l}$, при $t = 0$ это дает $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \sin\frac{k\pi x}{l}$.

Уже Тейлор показал, что каждый тон струны задается синусоидой вида $u = A(t)\sin\frac{k\pi x}{l}$, а Д. Бернулли использовал принцип суперпозиции тонов как наложение «простых изохронных колебаний». При этом Д. Бернулли подчеркивал общность своего решения, которое, по его мнению, охватывает «все возможные случаи». Но Д'Аламбер и Эйлер с ним не соглашались, т. к. в то время ничего еще не было ясно о том, какие функции могут быть представлены тригонометрическими рядами. Решен был лишь вопрос о вычислении коэффициентов Фурье. Впервые его поставил в общем виде в 1757 г. в одной из работ по небесной механике Клеро для функций, представимых рядом по косинусам на $(0,\pi)$. Но решает он его сложным способом: интерполируя функцию частичными суммами S_n ряда, находит коэффициенты a_k в виде некоторых сумм, а затем полагает $n = \infty$ и получает коэффициенты a_k в виде интегралов. В 1777 г. Эйлер в предположении, что функция представима рядом по косинусам, находит коэффициенты ряда уже привычным нам способом почленного интегрирования; его работа была опубликована лишь в 1798 г. В дискуссию о колебаниях струны включился и Лагранж, который, предполагая, что на невесомую струну «нанизаны» тяжелые точки, пришел к решению в виде тригонометрического ряда. В 1787 г. Петербургская АН объявила конкурс на тему о природе произвольных функций в задаче о колебаниях струны. Премию получил французский математик Л. Арбогаст (1759–1803), стоявший в целом на позициях Эйлера. Но этим вопрос далеко не был исчерпан и прояснился лишь в XIX в. после создания теории рядов Фурье и в XX в. после создания теории обобщенных функций. Дискуссия в XVIII в. по задаче о колебаниях струны способствовала более глубокому осмыслению понятия функции [60, т. 2, п. 419−425; 1, т 3, с. 412−415]. Предложенные Эйлером и Д'Аламбером способы решения этого уравнения были специальными, а метод Д. Бернулли тригонометрических рядов оказался применимым не только к этому уравнению, но и получил дальнейшее развитие в работе французского математика Ж. Б. Фурье «Аналитическая теория тепла» (1822) и у других математиков.

В области дифференциальных уравнений с частными производными Д'Аламбер занимался также решением линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, а некоторых – и с переменными, сводя этот вопрос к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка в полных дифференциалах. Здесь его исследования были несколько систематичнее, чем у Эйлера. Выше в очерке об Эйлере уже отмечалось, что, исследуя вопрос о движении жидкости, Д'Аламбер в 1752 г., а несколько позже и Эйлер пришли к уравнениям, называемым уравнениями Коши–Римана аналитичности функции. Но, в отличие от Эйлера, Д'Аламбер не связывает эти уравнения с вопросом о разложении функции в степенной ряд, т. е. с аналитичностью функции.

Не поднялся Д'Аламбер и до понимания Эйлером природы логарифмов отрицательных и комплексных чисел, считая, что $\ln(-x) = \ln x$. Почти до конца XVIII в. отрицательные числа (их определяли как противоположные положительным) не имели строгого обоснования. Многие считали их, как и комплексные числа, ненастоящими, фиктивными объектами, т. к. действия над ними не были строго доказаны. Такое представление об отрицательных числах выражает и Д'Аламбер в статье «Отрицательное» в «Энциклопедии». Эйлер, Клеро, Лаплас и др. делали безуспешные попытки строго вывести свойства отрицательных чисел, в частности, доказать правило знаков при умножении. Психологически трудно было свыкнутся с мыслью, что не все свойства положительных чисел выполняются и для отрицательных. Например, в пропорции $\frac{1}{-1} = \frac{-1}{1}$ отношение большего числа к меньшему равно отношению меньшего к большему. Это так называемый парадокс Антуана Арно (1612–1694) – французского логика, философа и математика, друга Б. Паскаля. Эйлер обсуждал этот кажущийся парадокс в переписке с датским математиком Г. Кюном и объяснял, что к этой пропорции неприменимо соответствующее свойство положительных чисел и что здесь налицо расширение понятия числа. Критические замечания Д'Аламбера

и Л. Карно в отношении отрицательных чисел указывали на слабые стороны учения о числе. Как уже упоминалось в ч. 1 пособия в очерке о Виете, полное геометрическое истолкование комплексных чисел и правил действий над ними (и, в частности, для отрицательных чисел) дал Каспар Вессель (1745–1818), родившийся в Норвегии и работавший геодезистом-картографом в Датской АН. Посвященная этому вопросу его единственная математическая работа «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях…» была представлена в 1797 г. и опубликована в 1799 г. Написанная на датском языке, эта работа оставалась неизвестной математикам, пока через 98 лет Датская АН не опубликовала ее французский перевод. Подробнее об учении о числе в XVIII в. и, в частности, о работе Веселя см. в [106]. Получившие известность строгие теории комплексных (а заодно и отрицательных) чисел были созданы уже в XIX в. Арганом, Гауссом и Гамильтоном. О Д'Аламбере: [98; 69; 130, с. 41–47; 3, с. 155–160; 214, с. 96–104].

Лагранж

В XVIII в. на втором месте после Эйлера стоит крупнейший французский математик, механик и астроном **Жозеф Луи Лагранж (1736–1813)**. Правнук французского офицера, он родился в Италии в г. Турине, где его отец был казначеем Управления промышленностью. Отец желал видеть его адвокатом и определил в Туринский университет. Изучая классиков римского права, Лагранж в то же время увлекается чтением работ Архимеда, Ньютона и др. и получает награду за победу в математическом конкурсе Парижской АН. В 19-летнем возрасте он пишет письмо Эйлеру, где излагает свой метод в вариационном исчислении, который впоследствии был назван методом вариаций. Здесь Лагранж вводит символ δ для вариации и очень просто получает уравнения Эйлера, сочетая варьирование с интегрированием по частям. Метод Лагранжа привел Эйлера в восхищение. Лагранж переходит в Артиллерийскую школу в Турине и в 19-летнем возрасте начинает преподавать математику, в частности, анализ бесконечно малых. Между ним

и Эйлером устанавливается регулярная переписка. Эйлер сообщает ему, что решил воздержаться от публикации своих новых результатов по вариационному исчислению, пока Лагранж не опубликует свои, т. к. не хочет отнимать у Лагранжа заслуженной им славы. В 1759 г. Лагранж в 23-летнем возрасте по представлению Эйлера был избран иностранным членом Берлинской АН, еще до публикации своих результатов. В 1761–1762 гг. появляется в печати мемуар Лагранжа «Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных формул», а в 1764 г. публикует свои новые результаты и Эйлер, выражая в предисловии восхищение методом Лагранжа и предлагая назвать новый раздел математики «вариационным исчислением». Вокруг Лагранжа в Турине образовался кружок математиков и физиков, на основе которого вскоре была создана Туринская АН.

В 1763 г. Лагранж совершил поездку в Париж, намереваясь затем поехать в Лондон. Но попасть в Лондон ему не удалось, т. к. он заболел после одного из обедов, где его угощали кушаньями «на итальянский лад». Зато за полгода, проведенного в Париже, Лагранж сблизился с французскими математиками Д'Аламбером, Клеро, Кондорсе и др. В 1766 г. Эйлер, уезжая из Берлина в Петербург, рекомендовал на свое место Лагранжа. Фридрих II обратился с приглашением к Д'Аламберу, но тот отказался и тоже рекомендовал Лагранжа, после чего Лагранж был приглашен в Берлин. Там он прожил 20 лет, исполняя обязанности президента Берлинской АН. В 1770 г. вышел мемуар Лагранжа «Размышления об алгебраическом решении уравнений», который Коши позже охарактеризовал как начало новой эры в алгебре. В Берлине Лагранжем было написано и самое крупное его произведение – двухтомная «Аналитическая механика», опубликованная в Париже в 1788 г. Эта книга представляет собой развитие и итог наивысших достижений в механике XVIII в., как «Начала» Ньютона в XVII в. Но Лагранж излагает механику чисто аналитически, на основе вариаций и дифференциальных

уравнений. К берлинскому периоду относится и ряд работ Лагранжа по теории чисел, а также около 2000 страниц исследований по астрономии.

В 1783 г. умерли Эйлер и Д'Аламбер. В качестве самого крупного математика остается Лагранж, но его научная деятельность ослабевает. В 1787 г. Лагранж переезжает в Париж и проводит там последние 26 лет жизни. Годы 1789–1794 – это бурное время французской революции, в которой активное участие принимают и ученые. Геометр Г. Монж (1746–1818) становится морским министром, математик Л. Карно (1753–1823) возглавляет оборону, астроном Ж. С. Байи (1736–1793) становится мэром Парижа, а математик и философ-просветитель, непременный секретарь Парижской АН маркиз А. Кондорсе (1743–1794) – вице-президентом Законодательного собрания. В 1793 г. Конвент принял декрет о высылке всех иностранцев из Франции, но с оговоркой, что это не касается Лагранжа. Лагранж не занимается политической деятельностью, но проявляет большую активность в общественной жизни. Он принимает участие в упорядочении финансовой системы и снабжения, по заданию Комитета общественного спасения исследует взрывную силу пороха в канале ствола пушки и решает с помощью дифференциальных уравнений задачу внутренней баллистики. Активно участвует в комиссии по введению метрической (десятичной) системы мер и весов, а также в коллективе по составлению тригонометрических таблиц на основе деления прямого угла на 100 частей (градов). Вместе с Монжем участвует в создании вузов − Политехнической и Нормальной школ. Читая курс лекций по математическому анализу в Политехнической школе, Лагранж подготовил и опубликовал на основе этого курса две монографии: «Теория аналитических функций» (1797) и «Лекции по исчислению функций» (1801). При Наполеоне положение Лагранжа упрочилось. Он становится графом, сенатором, кавалером ордена Почетного легиона. Наполеон назвал Лагранжа «Хеопсовой пирамидой науки». Парижская АН пять раз присуждала Лагранжу конкурсные премии.

Рассмотрим кратко основные достижения Лагранжа в математике и механике. Уже в первом письме к Эйлеру, а затем в работе «Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных формул» (1761–1762) Лагранж излагает свой метод вариации следующим образом. Мы рассмотрим простейший случай задачи с закрепленными концами: среди кривых $y = y(x)$ таких, что $y(a) = y_0$, $y(b) = y_1$, требуется найти ту, которая доставляет экстремум интегралу (т. е. функционалу) $J(y) = \int_a^b f(x, y, y')\,dx$. Подобно тому, как для аргумента и функции вводится понятие дифференциала d при переходе от значения аргумента к близкому, Лагранж в применении к кривым $y = y(x)$ и функционалам $J(y)$ вводит новый символ δ (позже Эйлер назвал его вариацией), играющий аналогичную роль при переходе от кривой $y = y(x)$ к близкой к ней кривой. Он отмечает свойство перестановочности операций d и δ и формально пишет равенство $\delta f = A\delta y + B\delta y'$, где $A = f_y$, $B = f_{y'}$, следовательно,

$$\delta J = \delta\int_a^b f(x, y, y')\,dx = \int_a^b \delta f \cdot dx = \int_a^b (A\delta y + B\delta y')dx =$$

$$\int_a^b A\delta y dx + \int_a^b B(\delta y)'\,dx.$$

Во втором слагаемом Лагранж использует интегрирование по частям и получает

$$\delta J = \int_a^b A\delta y dx + B\,\delta y\Big|_a^b - \int_a^b \delta y \cdot \frac{dB}{dx}dx = \int_a^b \left(A - \frac{dB}{dx}\right)\delta y dx,$$

т. к. $\delta y = 0$ в точках a и b в силу краевых условий. Поскольку операции d и δ выполняются по одинаковым правилам, Лагранж не считает нужным обосновать, что необходимым условием экстремума является условие

$\delta J = 0$. Из равенства $\int_a^b \left(A - \frac{dB}{dx} \right) \delta y dx = 0$ он без объяснения заключает о необходимости выполнения уравнения Эйлера $A - \frac{dB}{dx} = 0$, т. е. $f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0$. Таким образом, Лагранж считает очевидной первую, или основную, лемму вариационного исчисления (иногда ее называют леммой Лагранжа), которая (в различных формулировках) утверждает, что из равенства нулю интеграла от произведения непрерывной функции *Φ(x)* на произвольную функцию $h(x)$ из некоторого класса следует $\Phi(x) \equiv 0$ на отрезке интегрирования. Если учесть, что Лагранж имеет дело с аналитическими функциями, т. е. с подклассом непрерывных, то его утверждение является корректным, хотя и не доказано им. «Лемму Лагранжа» в современной формулировке дал немецкий математик Больца в 1904 г. Лагранж получает уравнение Эйлера для интеграла $\int_a^b f\left(x, y, y', ..., y^{(n)}\right) dx$, а также систему из двух уравнений Эйлера для $\int_a^b f\left(x, y, z, y', z', ..., y^{(n)}, z^{(n)}\right) dx$.

Немецкий математик Кнезер в 1900 г. назвал решения уравнений Эйлера экстремалями. Лагранж впервые рассмотрел и задачу с подвижными концами и из условия равенства нулю внеинтегральных членов получил условия, которым должны удовлетворять подвижные концы. Эти условия были названы Кнезером условиями трансверсальности. Задача вариационного исчисления на условный экстремум в простейшем случае заключается в отыскании экстремума функционала $\int_a^b f(x, y, y') dx$ при условии $\varphi(x, y, y') = 0$ и некоторых краевых условиях. Примерами таких задач являются изопериметрические, их решали Эйлер и Лагранж. В одномерном

случае Лагранж выделил класс задач на условный экстремум и с помощью метода неопределенных множителей нашел аналог уравнений Эйлера (в простейшем случае это уравнение $F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0$, где $F = f + \lambda(x)\varphi$, при условии $\varphi(x, y, y') = 0$).

Заметим, что ранее метод неопределенных множителей использовал Д'Аламбер при изучении систем дифференциальных уравнений и Эйлер в изопериметрических задачах, поэтому метод неопределенных множителей не вполне справедливо называют только по имени Лагранжа. Эйлер и Лагранж рассмотрели лишь необходимые условия так называемого слабого экстремума вариационных задач, когда δy и $\delta y'$ предполагаются бесконечно малыми, т. е. когда предполагается близость не только варьируемых кривых, но и их первых производных (т. е. направлений). Если же рассматривается лишь близость кривых (т. е. в норме $\max\limits_{x\epsilon[a,b]} |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon$), то говорят о сильном экстремуме. Достаточные условия слабого экстремума вариационных задач были указаны не вполне точно Лежандром в 1786 г., в точном виде – Якоби в 1837 г. Теорию сильного экстремума разработал Вейерштрасс в 1879 г. Подробнее о вариационном исчислении в XVIII в.: [1, т. 3, гл. 10].

Дадим краткое описание содержания главного труда Лагранжа «Аналитическая механика» (2 тома, 1788); подробнее с этим трактатом можно познакомиться по книге [99, с. 110–159] или по изданию трактата в 1950 г. на русском языке. Здесь Лагранж ставит цель, которую до него никому не удавалось осуществить: дать общее уравнение статики и динамики системы материальных точек, из которого можно вывести все свойства равновесия и движения точек, тел и жидкостей. При этом он полностью отказался от геометрической трактовки механики, изложив ее без единого рисунка, чисто аналитически. «Все любящие анализ, – пишет он, – с удовольствием убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа, и будут мне благодарны за то, что этим путем я расширил область

его применения». Книга состоит из двух частей: «Статика» и «Динамика», в них Лагранж последовательно реализует свой замысел построения механики, исходя из общих уравнений, а заканчивает каждую часть гидромеханикой. В статике он вводит в качестве общего уравнения принцип возможных перемещений: $\alpha P + \beta Q + \gamma R + ... = 0$, где α, β, γ – проекции возможных перемещений точек *A, B, C, …* на направления приложенных к ним сил *P, Q, R, …* . Если X_i, Y_i, Z_i – проекции на оси декартовой системы координат силы, действующей на точку (x_i, y_i, z_i), то общее уравнение статики для системы *N* точек имеет вид $\sum_{i=1}^{N}\left(\dot{X}_i\delta x_i + Y_i\delta y_i + Z\delta z_i\right) = 0$. В современных руководствах, например в «Аналитической механике» Ф. Р. Гантмахера, это и другие общие уравнения Лагранжа записываются кратко в векторной форме, а в качестве δr_i фигурируют виртуальные перемещения, совпадающие с возможными при «замораживании», т. е. фиксировании времени *t*, в уравнениях связи, наложенных на систему. В III отделе Лагранж впервые рассматривает случай потенциального силового поля, когда выражение $\sum_{i=1}^{N}\left(X_i dx_i + Y_i dy_i + Zdz_i\right)$ является полным дифференциалом некоторой функции Π, т. е. потенциальной энергии системы. Условие равновесия такой системы сводится к условию $d\Pi = 0$. Лагранж показывает, что положение равновесия, соответствующее минимуму функции Π, – устойчивое, а максимуму – неустойчивое. Далее Лагранж рассматривает механическую систему точек при наличии уравнений связи и, применяя метод неопределенных множителей, получает формулировку принципа освобождаемости системы от связей.

Во II части Лагранж приводит свое знаменитое общее уравнение динамики в виде $\sum_{i=1}^{N}\left(\left(X_i - m_i\ddot{x}_i\right)\delta x_i + \left(Y_i - m_i\ddot{y}_i\right)\delta y_i + \left(Z_i - m_i\ddot{z}_i\right)\delta z_i\right) = 0$, где

$X_i,\ Y_i,\ Z_i$ – проекции активных сил, приложенных к системе материальных точек $(x_i,\ y_i,\ z_i)$. Отсюда он выводит все теоремы динамики, в частности принцип наименьшего действия и дифференциальные уравнения движения. При выводе уравнений движения системы N материальных точек $(x_i,\ y_i,\ z_i)$ при наличии d независимых связей $f_j(t,\ x_1,\ y_1,\ z_1,\ \dots,\ x_N,\ y_N,\ z_N) = 0,\ j = 1,\ \dots,\ d$, Лагранж выражает пространственные координаты как функции от t и независимых, так называемых обобщенных координат $q_1, \dots, q_n$ (число n равно числу степеней свободы, т. е. $n = 3N - d$). Выполнив такой переход в общем уравнении динамики и приравняв нулю члены при вариациях независимых, т. е. обобщенных, координат, Лагранж получает носящие его имя уравнения движения II рода (уравнения Лагранжа в независимых координатах) $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_k},\quad k = 1,\ \dots,\ n$, где q_k – обобщенные координаты, $\dot{q}_k$ – обобщенные скорости, T – кинетическая энергия системы, Π – потенциальная. Применяя метод неопределенных множителей, Лагранж получает затем уравнения движения, называемые уравнениями Лагранжа I рода (с множителями λ_j). Лагранжем была введена и функция $L = T - \Pi$, равная разности кинетической и потенциальной энергии, тогда уравнения II рода принимают вид $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = 0$, или $dp_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}dt$, где $p_k = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}$ – обобщенные импульсы. Далее он варьирует произвольные постоянные γ_k в общем интеграле этой системы и приходит к соотношению вида $\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \gamma_k}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial \gamma_s} - \frac{\partial q_i}{\partial \gamma_s}\cdot\frac{\partial p_i}{\partial \gamma_k}\right) = 0$, т. е.

$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial(q_i,p_i)}{\partial(\gamma_k,\gamma_s)}=0$. Это означает, что сумма, стоящая под знаком производной, не меняется при движении системы, эту сумму называют скобкой Лагранжа и обозначают $[\gamma_k,\gamma_s]$. В дальнейшем метод вариации произвольной постоянной и теоремы типа сохранения скобок Лагранжа развивали Пуассон, Гамильтон, Якоби, Остроградский, Лиувилль, Пуанкаре. В своем трактате Лагранж заложил также основы теории малых колебаний около положения равновесия консервативной системы с независящими от времени условиями. С помощью метода неопределенных множителей он вывел уравнения равновесия жидкости, рассмотрел задачу о равновесии твердого тела, погруженного в жидкость и др. Получил он и важные результаты в гидродинамике при изучении движения идеальной жидкости, выводя уравнения движения жидкости из общего уравнения динамики.

Лагранжу принадлежит разработка своеобразного подхода к обоснованию и построению математического анализа. Понимая, что существующие в то время методы обоснования анализа (метод бесконечно малых, в частности «нулей» Эйлера, метод пределов и др.) были несовершенными, Лагранж предпринимает попытку построения анализа на основе степенного ряда как первичного понятия. Его идея заключается в том, чтобы, ограничившись функциями $f(x)$, допускающими разложение в степенной ряд по натуральным степеням аргумента, определять производные $f^{(k)}(x)$ не как пределы отношений бесконечно малых приращений, а как умноженные на $k!$ коэффициенты разложения функции $f(x)$ в ряд по натуральным степеням приращения аргумента. Уже в одной работе, опубликованной в 1772 г., он рассматривает (в других обозначениях) разложение $f(x+h)$ по натуральным степеням h и предлагает умноженные на $k!$ коэффициенты этого ряда называть функциями, производными (dérivée) от $f(x)$, т. е. «производными

функциями» (до него на континенте производные обычно называли «дифференциальными отношениями», а в Британии – флюксиями). Лагранж обозначает производные штрихованными буквами и устанавливает, что $f''(x)$ можно найти из разложения $f'(x)$ в ряд так же, как $f'(x)$ из разложения для $f(x)$ и т. д. Он пишет, что «дифференциальное исчисление, рассматриваемое во всей общности», состоит в нахождении «производных функций» из разложения в степенной ряд данной функции. Эту идею вскоре использует для построения дифференциального исчисления Антуан Кондорсе, который писал в 1778–1782 гг. большой курс анализа, оставшийся незаконченным и неопубликованным. Заметим, что Кондорсе одним из первых (а возможно, и первый) стал употреблять термин «аналитическая функция». Луи Антуан Арбогаст (1759–1803), окончивший Страсбургский университет и преподававший математику в учебных заведениях Страсбурга, представил в 1789 г. в Парижскую АН работу «Опыт о новых началах дифференциального и интегрального исчисления, независимых от теорий бесконечно малых и пределов». Работа была основана на той же идее, но не была опубликована.

Свой подход к математическому анализу Лагранж осуществил в монографии «Теория аналитических функций» (1797), написанной на основе лекций, которые он читал в Политехнической школе. Полное название монографии следующее: «Теория аналитических функций, содержащая начала дифференциального исчисления, освобожденные от какого-либо рассмотрения бесконечно малых, исчезающих пределов и флюксий и сведенные к алгебраическому анализу конечных величин». Книга состоит из введения и трех глав: изложение теории и ее приложений в анализе, приложения к геометрии и механике. Изложение чисто аналитическое, в книге нет ни одного рисунка. Это курс математического анализа, а не теория функций комплексной переменной, которая тогда еще только начинала создаваться. В XVIII в. считалось несомненным, что практически все функции (за исклю-

чением некоторых «экзотических», вроде $y=(-1)^x$, которую рассматривал Эйлер) можно разложить в ряд по целым или рациональным степеням аргумента. После некоторых нестрогих, не приводившихся в упомянутой статье 1772 г., рассуждений относительно вида показателей степеней при разложении функции в ряд по степеням приращения аргумента Лагранж приходит к выводу, что «всякая» функция разлагается в ряд по натуральным степеням приращения аргумента, за исключением разве конечного числа точек, в которых разложение может иметь дробные степени. (Такой исключительный случай имеет место, например, для функции $f(x)=(x-a)\sqrt{x-b}$ в точке $x=b$, т. к. $f(b+h)=(b-a+h)h^{\frac{1}{2}}=(b-a)h^{\frac{1}{2}}+h^{\frac{3}{2}}$.) Запись Лагранжа разложения функции в общем виде $f(x+i)=fx+pi+qi^2+ri^3+$ и т. д. несколько отличается от нашей (вместо нашего h или Δx для приращения аргумента он использует букву i, причем аргумент x, в отличие от $x+i$, под знаком функции не берет в скобки). Формально установив общий закон образования коэффициентов в указанном выше ряде, он переписывает его в виде $f(x+i)=fx+f'xi+\frac{f''x}{2}i^2+\frac{f'''x}{2\cdot 3}i^3+\frac{f^{IV}x}{2\cdot 3\cdot 4}i^4+$ и т. д., т. е. получает ряд Тейлора. Лагранж далее пишет: «Мы будем называть функцию fx первообразной функцией по отношению к произведенным из нее функциям $f'x$, $f''x$ и т. д., а эти функции – производными по отношению к ней». В случае, когда y есть функция от x, он обозначает ее производные через y', y'', ... До Лагранжа производные обозначали в виде $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, ..., или $\dot{y}$, $\ddot{y}$, ... Впрочем, обозначения $f'(x)$, $f''(x)$, ... уже встречаются у Эйлера в одном месте III тома «Интегрального исчисления» (1770), а еще раньше – у Фонсене в 1759 г., но полагают, что часть работы Фонсене написана для него Лагранжем. В книге Арбогаста «Исчисление дифференци-

рований» (1800) вводится обозначение $D_x y$ по первой букве слова *dérivation* – дифференцирование, раньше обозначение Dy для производной иногда употреблял И. Бернулли.

Главным результатом Лагранжа в «Теории аналитических функций» является полученная им в VI главе I части формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Он записывает ее в виде

$$f(z+x) = fz + xf'(z+u) = fz + xf'z + \frac{x^2}{2}f''(z+u) = fz + xf'z + \frac{x^2}{2}f''z +$$

$+\dfrac{x^3}{2\cdot 3}f'''(z+u)$, где u – неизвестная величина, находящаяся между 0 и x. (В отличие от современной записи, Лагранж не заключает аргумент z в скобки.) Первое из этих равенств представляет собой знаменитую теорему Лагранжа о конечных приращениях, которая вскоре стала играть особенно важную роль в анализе. Лагранж получает свой результат с помощью нестрого доказанной им леммы: если $f'(x) > 0$ на $[a,b]$, то $f(x)$ возрастает на $[a,b]$. В настоящее время теорема Лагранжа очень просто выводится из теоремы Ролля, но в то время теорема Ролля была известна лишь для многочленов. Для Лагранжа остаточный член формулы Тейлора был лишь средством оценки погрешностей, возникающих при отбрасывании членов ряда Тейлора, начиная с некоторого. Первичным понятием у Лагранжа был ряд Тейлора, а вторичным – формула Тейлора. При современном построении анализа ситуация обратная: для $f(x)$ сначала выводится формула Тейлора, а уж затем с помощью ее остаточного члена исследуется, допускает ли $f(x)$ разложение в ряд Тейлора. Лагранж был далек от использования остаточного члена в этой роли, ему не был известен тот факт, что не всякая функция является суммой своего ряда Тейлора. О. Л. Коши (1789–1857) в начале XIX в. впервые установил это свойство, построив пример функции, которая при $x = 0$ обращается в нуль вместе со всеми своими производными. Эйлер и Лагранж считали такой случай невозможным. Но уже в повторном издании «Теории аналитических функций»

в 1813 г. Лагранж отмечает, что некоторые математики допускают существование функций, которые в данной точке равны нулю вместе со всеми своими производными. Возможно, он имел в виду молодого Коши. Близкими по содержанию к «Теории аналитических функций» являются «Лекции об исчислении функций» (1801, 1806). Здесь формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа изложена в 9-й лекции с видоизмененным доказательством. В «Лекциях» приведены также сведения по дифференциальным уравнениям.

Уже в XVII в. Ньютон считал степенные ряды универсальным средством представления функций. Метод Лагранжа определения производных не устранял трудностей обоснования математического анализа, а только сужал класс допустимых функций теми, которые представимы в виде степенных рядов, сами же ряды вводились чисто формально. Отказ от понятий предела и бесконечно малых переносил трудности обоснования анализа на ряды. Поэтому метод Лагранжа встретил мало поддержки у математиков, а в начале XIX в. с его критикой выступили: польский математик, имя которого носит введенный им в 1812 г. функциональный определитель, Ю. М. Гёне-Вроньский (1776–1853) в «Опровержении теории аналитических функций Лагранжа» (1812), Л. Карно во 2-м издании «Размышлений о метафизике исчисления бесконечно малых» (1813) и др. В отношении дальнейшего развития понятия функции в XIX в., когда объектом пристального изучения стали также и неаналитические функции, метод Лагранжа представляется шагом назад. Но подход Лагранжа способствовал ему в получении формулы Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа и теоремы о конечных приращениях, а также оказал влияние на построение в XIX в. теории аналитических функций Вейерштрассом, но уже в комплексной области и с учетом аналитического продолжения. Оперирование же со степенными рядами без учета их сходимости нашло продолжение в современной алгебре формальных степенных рядов.

Из других достижений Лагранжа в анализе отметим следующие. В теории условного экстремума он использовал разработанный им метод неопределенных множителей, который широко применял и в «Аналитической механике». Как уже упоминалось, Эйлер и Лагранж ввели двойные и тройные интегралы. Ньютон в «Началах» (1687) и целый ряд математиков XVIII в. изучали притяжение материальной точки сфероидом (эллипсоидом вращения). До Лагранжа и Лапласа наиболее значимые результаты были получены Ньютоном и Маклореном для эллипсоида, при этом использовались элементы интегрирования в геометрическом виде. Но только Лагранж и Лаплас в XVIII в., используя тройные интегралы, заложили основы современной теории потенциала. Первым применил тройные интегралы Лагранж в работе «О притяжении эллиптических сфероидов» (1773). Формально выведя общую формулу замены переменных в тройном интеграле, он применил ее и в случае сферических координат и впервые полностью исследовал случай притяжения однородным эллипсоидом точки единичной массы, расположенной внутри или на поверхности этого эллипсоида. В том же году в работе «О вековом уравнении Луны» Лагранж установил, что поле тяготения Ньютона является потенциальным и ввел функцию, которую в XIX в. стали называть потенциальной (Грин, 1828), или силовой (Гельмгольц, 1834), или потенциалом (Гаусс, 1840).

В 1792–1793 гг. Лагранж получил интерполяционную формулу в виде многочлена, совпадающего в n точках с интерполируемой кривой, эта формула носит его имя, он опубликовал ее в 1798 г. Несколько ранее ее получил и опубликовал в 1779 г. английский математик Э. Варинг (1734–1798).

Лагранжу принадлежат важные результаты в теории дифференциальных уравнений – обыкновенных и в частных производных. В 1775 г. он применил метод вариации постоянных к неоднородному линейному уравнению n-го порядка с переменными коэффициентами, до этого метод вариации применяли к уравнениям 2-го порядка Эйлер и Д. Бернулли. Применяя к уравнению n-го порядка с переменными коэффициентами

$Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + ... = T$ метод интегрирующего множителя и требуя, чтобы после умножения на этот множитель z левая часть была точной производной, Лагранж пришел к уравнению $Lz - \frac{d(Mz)}{dt} + \frac{d^2(Nz)}{dt^2} - ... = 0$, которое позже назвали сопряженным с однородным уравнением $Ly + M\frac{dy}{dt} + N\frac{d^2y}{dt^2} + ... = 0$. Этот метод Лагранж опубликовал в 1766 г., а в 1778 г. его независимо нашел Эйлер, указавший дополнительно, что сопряженность линейных однородных выражений есть свойство взаимное. Со временем теория сопряженных уравнений и сопряженных краевых задач разрослась, а в XX в. была обобщена в теории линейных операторов. В той же работе Лагранж показал, что если известно m частных решений линейного однородного уравнения, то можно понизить на m единиц порядок соответствующего неоднородного уравнения. По-иному это тогда же получил Д'Аламбер. В 1776 г. (опубл. в 1779 г.) Лагранж изобрел метод интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью цепных дробей, при этом он получил разложения функций $(1+x)^a$, $\ln(1+x)$, e^x в цепные дроби.

Б. Тейлор в «Методе приращений» (1715) впервые, решая уравнение $(1+z^2)^2(\frac{dx}{dz})^2 = 4x^3 - 4x^2$, нашел, кроме общего решения, также и решение $x = 1$, которое назвал особым, но не выяснил его геометрического смысла. После этого Эйлер, Клеро, Д'Аламбер, Лаплас и др. в отдельных случаях также находили решения, не получающиеся из общего ни при каком значении произвольной постоянной. Но только Лагранжу удалось построить общую теорию особых решений дифференциальных уравнений вида $F(x, y, y') = 0$. Уже в обширной статье 1774 г. «О частных интегралах дифференциальных уравнений», опубликованной в 1776 г., Лагранж

приводит два общих способа получения особых решений. Во-первых, исключая параметр C из системы $\begin{cases} V(x,\ y,\ C) = 0, \\ \dfrac{\partial V}{\partial C}(x,\ y,\ C) = 0, \end{cases}$ где $V(x,\ y,\ C)$ – общий интеграл уравнения $F(x,\ y,\ y') = 0$, он получает кривую вида $\varphi(x, y) = 0$, которую интерпретирует как огибающую однопараметрического семейства кривых, представляющих общее решение. Он не знает, что полученная кривая $\varphi(x, y) = 0$ может не быть огибающей и может не давать особого решения, а представлять собой геометрическое место особых точек кривых. Во-вторых, Лагранж указывает и способ отыскания особого решения уравнения $F(x,\ y,\ y') = 0$ из системы $\begin{cases} F(x,\ y,\ y') = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,\ y,\ y') = 0, \end{cases}$ решение которой называется дискриминантной кривой, она может давать или не давать особое решение. Более того, Лагранж указывает, что если функция $y = y(x)$, полученная из дискриминантной кривой $\psi(x, y) = 0$, удовлетворяет системе трех уравнений $F(x,\ y,\ y') = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial y'}(x,\ y,\ y') = 0$, $\dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y}\dfrac{dy}{dx} = 0$, то $y = y(x)$ является решением (особым) уравнения $F(x,\ y,\ y') = 0$. Последний факт, представляющий, в отличие от двух предыдущих, достаточное условие особого решения, не был замечен математиками, и его переоткрыл Г. Дарбу в 1873 г., т. е. через 100 лет. В «Лекциях об исчислении функций» (1801) Лагранж, кроме того, развивает теорию особых решений применительно к уравнениям высших порядков, а также указывает общий метод получения уравнения, для которого заданная кривая является особым решением. Благодаря «Лекциям» Лагранжа его теория особых решений и сам термин «особые решения» получили широкую известность.

Частные случаи дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных рассматривали Эйлер и Д'Аламбер. Общее уравнение первого порядка вида $P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$ рассмотрели: Лаплас в 1773 г. и Лагранж в 1774 г. Лаплас при этом использовал замену переменной и разложение искомой функции в ряд. Лагранж излагает свой метод в статье «О частных интегралах дифференциальных уравнений», опубликованной в 1776 г. Он заключается в сведении указанного выше уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{P(x,y)}=\frac{dy}{Q(x,y)}=\frac{dz}{R(x,y,z)}$ и в настоящее время при P, Q, R, зависящих от x, y, z, входит в учебники по дифференциальным уравнениям. Позже Лагранж распространил свой метод на случай n переменных. В 1770–1790 гг. Лагранж занимался также исследованием нелинейных уравнений вида $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0$, где $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Этот же вопрос рассматривал тогда и французский математик Поль Шарпи, который жил в Страсбурге, а потом учился в Коллеж де Франс в Париже и умер молодым около 1785 г. Он представил Парижской АН в 1784 г. статью о решении нелинейных уравнений $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0$, но она не была напечатана. Его метод был развит Лагранжем и под названием метода Лагранжа–Шарпи входит и в настоящее время в учебники дифференциальных уравнений. Идея метода состоит в том, что к уравнению $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0$ подбирается уравнение $\Phi(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=a$, где a – произвольная постоянная, так, чтобы систему можно было решить относительно p и q и чтобы при этом p и q удовлетворяли условию интегрируемости $\frac{\partial p}{\partial y}=\frac{\partial q}{\partial x}$. Последнее условие приводит к линейному уравнению в частных производных для функции

$\Phi(x, y, z, p, q) = a$, которое эквивалентно системе обыкновенных дифференциальных уравнений $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = -\frac{dp}{X + Zp} = -\frac{dq}{Y + Zq}$, где $P = \frac{\partial F}{\partial p}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial q}$, $X = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial F}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial F}{\partial z}$.

Свои результаты по дифференциальным уравнениям в частных производных Лагранж изложил в «Лекциях об исчислении функций». В ряде работ Лагранж касается и геометрического смысла различного вида решений дифференциальных уравнений в частных производных. Однако наиболее полно геометрическую интерпретацию дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка выразил французский математик Г. Монж (1746–1818).

Важнейшим достижением XVIII в. в алгебре явилась работа Лагранжа «Размышления об алгебраическом решении уравнений» (1770), она посвящена вопросу о решении алгебраических уравнений в радикалах и представляет собой первый крупный шаг на пути к созданию теории групп. Еще до Лагранжа были подмечены некоторые связи вопроса о решении алгебраических уравнений с перестановками его корней. Симметрической функцией n переменных называется функция, не меняющая своих значений при любой перестановке этих переменных. Формулы французского математика XVI в. Виета выражают с точностью до знака коэффициенты a_i алгебраического уравнения $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n = 0$ в виде элементарных симметрических многочленов от его корней, т. е. $a_1 = -(x_1 + x_2 + ... + x_n)$, $a_2 = x_1x_2 + x_1x_3 ... + x_{n-1}x_n$, …, $a_n = (-1)^n x_1 ... x_n$. Известные способы решений алгебраических уравнений 3-й и 4-й степеней в радикалах заключались в сведении этих уравнений путем замены переменной к вспомогательным уравнениям (резольвентам) более низкой степени. Английский математик Э. Варинг (1734 – 1798) в 1762 г. показал, что если x_1, x_2, x_3, x_4 – корни

уравнения 4-й степени, то корни его кубических резольвент можно выразить, например, в виде $x_1x_2+x_3x_4$, $(x_1+x_2-x_3-x_4)^2$, $(x_1x_2-x_3x_4)^2$, причем каждое из этих выражений при всевозможных перестановках корней x_i принимает ровно 3 различных значения в том смысле, что при выполнении всех 4!=24 перестановок корней x_1, x_2, x_3, x_4, например, в первом из указанных выше выражений получим ровно 3 различных значения: $\varphi_1=x_1x_2+x_3x_4$, $\varphi_2=x_1x_3+x_2x_4$, $\varphi_3=x_1x_4+x_2x_3$. Уже за 20 лет до выхода работы Лагранжа Эйлеру, а несколько позже и Варингу были известны следующие факты теории алгебраических уравнений:

а) всякая рациональная функция от корней уравнения, принимающая при всевозможных перестановках его корней k различных значений, удовлетворяет алгебраическому уравнению степени k, коэффициенты которого рационально выражаются через коэффициенты исходного уравнения;

б) основная теорема теории симметрических функций: всякая рациональная симметрическая функция выражается, и притом однозначно, в виде рациональной функции от элементарных симметрических функций (следовательно, от корней алгебраического уравнения).

Лагранж проводит рассуждения по следующей схеме, в которой впервые появляются очень важные элементы будущей теории групп. Если $y=\varphi(x_1,...,x_n)$ – рациональная функция от корней уравнения $x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_n=0$, то при всевозможных перестановках его корней x_1, …, x_n она принимает $n!$ значений φ_i. Пусть из них всего k различных: φ_1, ..., φ_k. Используя приведенное выше утверждение а), Лагранж рассматривает вспомогательное уравнение $(y-\varphi_1)(y-\varphi_2)...(y-\varphi_k)=0$, т. е. $y^k-(\varphi_1+...+\varphi_k)y^{k-1}+...+(-1)^k\varphi_1...\varphi_k=0$. Его коэффициенты не меняются при перестановках корней x_1, ..., x_n исходного уравнения, т. е. являются симметрическими функциями от корней x_1, ..., x_n, поэтому согласно

утверждению б) эти коэффициенты рационально выражаются через корни $x_1, \ldots, x_n$. Вопрос о решении исходного уравнения степени n сводится, таким образом, к решению вспомогательного уравнения степени k, при этом практически важен случай, когда $k < n$, т. е. когда вспомогательное уравнение сводится к уравнению степени ниже n. Поскольку степень k вспомогательного уравнения равна числу различных значений, принимаемых рациональной функцией $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ при всевозможных перестановках корней $x_1, \ldots, x_n$, то все сводится к изучению значений рациональной функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ на перестановках корней или, что более удобно, на подстановках корней, т. е. $\begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \\ x_{k_1} \ldots x_{k_n} \end{pmatrix}$, короче $\sigma = \begin{pmatrix} 1 \ldots n \\ k_1 \ldots k_n \end{pmatrix}$. Они образуют так называемую симметрическую группу S_n степени n, порядка $n!$ (порядком группы называется число ее элементов; термин «группа» ввел французский математик Э. Галуа в 1830 г.). Лагранж впервые приступает к исследованию свойств группы подстановок. Подстановки, оставляющие функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ неизменной, образуют подгруппу H порядка m. Если подстановка σ_i переводит φ в φ_i, то и $\sigma_i H$ переводит φ в φ_i. Чтобы исследовать вопрос о значениях, принимаемых функцией φ, Лагранж разбивает группу S_n на смежные классы $\sigma_i H$ по подгруппе H (не вводя терминов «подгруппа», «смежный класс») и показывает, что смежные классы имеют тот же порядок m, что и подгруппа H, причем либо совпадают, либо не пересекаются. Таким образом, можно записать, что $S_n = H + \sigma_1 H + \sigma_2 H + \ldots + \sigma_{k-1} H$. Отсюда следует, что $n! = km$, т. е. порядок подгруппы является делителем порядка группы. Эта теорема справедлива для любой конечной группы и носит имя Лагранжа. Она явилась первым важным фактом теории групп. Число k называется индексом подгруппы. Оно равно числу смежных классов по этой

подгруппе. Оказалось, что число различных значений функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ при всевозможных перестановках корней исходного уравнения равно $k = \frac{n!}{m}$, где k – индекс, а m – порядок подгруппы H, оставляющей неизменной функцию φ. Лагранж вводит понятие подобных функций: рациональные функции $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ и $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ называются подобными, если они не меняются лишь от действия на них подстановок из одной и той же подгруппы H, т. е. $H\varphi = \varphi$, $H\psi = \psi$. Он доказывает теорему: подобные функции выражаются рационально одна через другую и коэффициенты исходного уравнения (т. е. лежат в одном и том же поле). Лагранж приходит к выводу, что «истинный принцип» решения алгебраических уравнений заключается в рассмотрении группы подстановок корней уравнения, ее подгрупп и рациональных функций от корней уравнения, инвариантных под действием подстановок из подгруппы. Далее он вводит так называемые «резольвенты Лагранжа» $u = x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n$, где α – мнимый корень n-й степени из единицы. Выбирая функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ в виде $y = (x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3 + \ldots + \alpha^{n-1} x_n)^n$ и циклическую подстановку $x_\nu \to x_{\nu+b}$ корней исходного уравнения, на которых φ принимает конечное число k различных значений, Лагранж выражает в радикалах решения уравнений 3-й и 4-й степеней, а также циклических уравнений любой степени. (Уравнение называется циклическим, если группа подстановок его корней – циклическая, т. е. все ее элементы являются степенями некоторого ее элемента.) И хотя рассуждения Лагранжа не позволили ему решить вопрос в общем случае, тем не менее, они дали ему основание высказать сомнение в том, что любое уравнение степени $n \geq 5$ может быть решено в радикалах. Через четыре года после «Размышлений» Лагранжа французский математик А. Вандермонд (1735–1796), имя которого носит известный определитель, опубликовал работу по теории решения алгебраических уравнений в радикалах. Он также рассуждает сходным

образом, но в менее легкой и общей форме. Представляет интерес приведенное им здесь, хотя и не полное, исследование разрешимости в радикалах так называемого «уравнения деления окружности» $x^n - 1 = 0$, корни которого лежат на единичной окружности. Начатое Лагранжем изучение группы подстановок в вопросе о решении алгебраических уравнений в радикалах было продолжено рядом математиков в первые три десятилетия XIX в. и дало полное решение этого вопроса. Немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777–1855) около 1796 г. доказал, что уравнение $x^n - 1 = 0$ при любом натуральном $n \geq 2$ разрешимо в радикалах и выяснил, когда оно разрешимо в квадратных радикалах. Итальянский математик П. Руффини (1765–1822) в 1801–1813 гг. показал нестрого, а норвежский математик Н. Х. Абель (1802–1829) в 1821–1826 гг. доказал строго, что не всякое алгебраическое уравнение степени $n \geq 5$ разрешимо в радикалах. Кроме того, Абель нашел, что так называемые нормальные уравнения с коммутативной (абелевой) группой Галуа всегда разрешимы в радикалах. Французский математик Э. Галуа (1811−1832) нашел групповой критерий разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. В результате этих исследований оказалось важным не само окончательное решение проблемы разрешимости алгебраических уравнений в радикалах, а возникшие при этом понятия и факты, которые легли в основу теории групп и полей.

Из других достижений Лагранжа в алгебре отметим следующие. В доказательстве Эйлера основной теоремы алгебры Лагранж в 1777 г. строго провел редукцию от уравнений степени 2^k к уравнениям степени 2^{k-1}, лишь намеченную Эйлером. Лагранжу принадлежат методы: вычисление корней алгебраического уравнения с помощью цепных дробей, исключение переменной из системы алгебраических уравнений (составление результанта), приведение квадратичной формы к каноническому виду путем выделения полных квадратов.

Лагранж внес вклад также в теорию чисел. В 1766 г., еще не зная о результатах Эйлера, он решает уравнение Ферма $ax^2 + 1 = y^2$ (a – целое и не является квадратом) с помощью разложения $\sqrt{a}$ в цепную дробь. При

этом Лагранж доказал теорему: всякая действительная квадратическая иррациональность $\sqrt{a}$ изображается периодической цепной дробью. Обратную теорему, более легкую, ранее доказал Эйлер. Указанное уравнение также называют уравнением Пелля, по имени английского математика XVII в., которому Эйлер ошибочно приписал один из методов (метод Валлиса–Броункера) решения этого уравнения, хотя Пелль не имел никакого отношения к этому уравнению. В 1767 г. Лагранж рассматривает уравнение $ax^2 + b = y^2$ (a, b – целые, число a не является квадратом). К нему сводятся неопределенные уравнения второй степени общего вида. Лагранж получает все решения этого уравнения в целых числах и отмечает, что указанные ранее Эйлером формулы не дают всех решений уравнения. Уравнение $ax^2 + 1 = y^2$ (a целое и не является квадратом) имеет большую историю. Уже за несколько веков до н. э. индусы знали при $a = 2$ решение $x = 408$, $y = 577$, а Евклид в «Началах» указывает, как в случае $a = 2$ можно найти сколь угодно много решений этого уравнения. Индийский математик Брахмагупта (VII в.) демонстрирует весьма тонкую технику, находя при $a = 92$ минимальное решение $x = 120$, $y = 1151$, а индийский математик Бхаскара II (XII в.) дает общий (так называемый «циклический») метод решения уравнения. В Европе в XVII в. Ферма возобновил постановку задачи о решении неопределенных уравнений в целых числах. В своем «втором вызове математикам» в 1657 г. он предлагает найти метод, дающий бесконечное количество решений уравнения $ax^2 + 1 = y^2$ (a – целое и не является квадратом) в целых числах и, в частности, решить его при $a = 149$, 109 и 433. Ферма заведомо обладал способом решения этого уравнения, который позволял ему находить очень трудные случаи, где минимальное решение невозможно найти простым подбором. Например, при $a = 149$ минимальное решение x имеет 10 разрядов, а при a=109 оно имеет 14 разрядов, тогда как для подавляющего большинства значений a от 2 до 150 минимальное решение x имеет лишь

один или два разряда. Случай $a = 61$ также трудный, его Ферма предложил Френиклю де Бесси. Заметим, что Бхаскара II за 5 веков до Ферма также выделил случай $a = 61$ и привел правильное минимальное решение $x = 226153980$. Откликнувшись на вызов Ферма, английские математики XVII в. Валлис и Броункер нашли так называемый «английский» способ решения его уравнения. Но до Лагранжа никто не мог доказать, что какой-либо из предложенных способов дает все решения уравнения Ферма.

В 1770 г. Лагранж доказал теорему: всякое натуральное число можно представить в виде суммы не более чем четырех квадратов натуральных чисел. В 1773 г. он рассмотрел вопрос о представлении делителей натуральных чисел вида $n = u^2 + av^2$ квадратичными формами вида $bx^2 + 2cxy + dy^2$, ввел понятие эквивалентных форм одного и того же дискриминанта, положив начало теории классов бинарных квадратичных форм, которую разрабатывал молодой К. Ф. Гаусс в «Арифметических исследованиях» (1801).

О Лагранже: [99; 100; 1, т. 3; 69; 2, с. 96–106; 3, с. 160–170; 74].

Ламберт

Кратко охарактеризуем математическое творчество менее знаменитых современников Лагранжа. Во время пребывания Лагранжа в Берлине с ним был в тесных отношениях крупный немецкий математик, физик и астроном **Иоганн Генрих Ламберт (1728–1777).** Он родился в г. Мюлузе в Эльзасе, входившем тогда в Швейцарский союз, поэтому Ламберт считал себя швейцарцем. Отец его был бедным портным. Обладая хорошим почерком, Ламберт с ранних лет зарабатывал себе на жизнь переписыванием рукописей, а затем устроился воспитателем детей вельможи, имевшего прекрасную библиотеку. Имея доступ к книгам, Ламберт усиленно занялся самообразованием, изучил латынь и очень увлекся математикой и физикой. С 1755 г. начал публиковать свои научные работы. По предложению Эйлера Ламберт в 1761 г. был избран членом Берлинской АН, но стал там работать с 1765 г., когда получил разрешение короля Фридриха II.

Ламберт имеет достижения в математическом анализе, геометрии, теории чисел, алгебре. В «Новом Органоне» (1754) и других работах по логике он вносит оригинальные идеи относительно исчисления высказываний с помощью языка знаков. Основные понятия и закономерности нового раздела физики он устанавливает в фундаментальном труде «Фотометрия, или об изменениях и сравнениях света, цветов и теней» (1760). Внесистемная единица яркости света носит название ламберт. В астрономии Ламберт занимался, в частности, исследованием кометных орбит и вращения планет. В книге «Космологические письма об устройстве Вселенной» (1761) Ламберт, опережая эпоху, развил идею иерархического строения Вселенной.

Наиболее известным достижением Ламберта в области математического анализа является установление иррациональности чисел e и π. В сборнике [101] имеется перевод одной из двух его работ, посвященных этому вопросу. Для доказательства иррациональности чисел e и π Ламберт использует цепные дроби. Высокоодаренный ученик Ньютона, рано умерший математик Роджер Коутс (Котес, 1682–1716) уже в 1714 г. получил разложение числа e в цепную дробь, но не сделал из этого никаких выводов о природе числа e. В одной работе 1737 г. Эйлер указал прием преобразования цепных дробей в ряды и обратно. Не зная о результате Коутса, Эйлер там же получил разложения в цепные дроби чисел e, $\sqrt{e}$, $\frac{e-1}{2}$, заменяя десятичные приближения этих чисел отношениями натуральных чисел и используя алгоритм Евклида. И если в десятичных приближениях этих чисел не обнаруживается никакой закономерности, то в соответствующих им разложениях в цепные дроби видны закономерности в образовании элементов, например:

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\cfrac{1}{18+\ldots}}}}}$$

Эйлер является основоположником теории цепных дробей. Во «Введении в анализ бесконечных» (1748) он посвятил разложению в цепные дроби (он называет их непрерывными) всю последнюю главу. По аналогии с суммой ряда Эйлер понимает значение бесконечной цепной дроби в более общем смысле, чем в настоящее время, поэтому его не занимает вопрос об исследовании сходимости бесконечных цепных дробей. Из разложений в цепные дроби для чисел e, $\sqrt{e}$, $\frac{e-1}{2}$ во «Введении» Эйлер приводит лишь последнее. (Любопытно, что разложения для e и $\sqrt{e}$ в виде, указанном Эйлером, были вскоре забыты и их снова открыл немецкий математик А. Гурвиц в 1891 г.) Эйлеру и Ламберту было известно, что рациональные числа представляются конечными цепными дробями неоднозначно, если не требовать дополнительных условий на цепные дроби; то же касается и бесконечных цепных дробей. Ламберт пишет, что под влиянием разложения Эйлера для $\frac{e-1}{2}$ он нашел разложения в цепные дроби выражений $\frac{e-1}{e+1}$, $\frac{e^2-1}{e^2+1}$ и вообще

$$\text{th}\frac{x}{2}=\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+...}}}}.$$

Далее он заключает: «Так как эти дроби продолжаются бесконечно, то ни e, ни e^x, если x рациональное число или дробь, не может быть точно выражено рациональной дробью».

В XVIII в. уже до Ламберта мало кто из математиков сомневался в том, что число π – иррациональное. Это мнение подкреплялось получением все большего числа десятичных знаков в приближениях числа π в связи совер-

шенствованием техники вычислений. Голландский математик Адриан ван Роумен в 1597 г. первым в Европе нашел число π с 17 десятичными знаками с помощью вписанного в круг 2^{30}-угольника. Голландский математик Лудольф ван Цейлен, профессор математических и военных наук Лейденского университета, в 1586–1596 гг. вычисляет π с 20 десятичными знаками с помощью $15 \cdot 2^{33}$-угольника, а позже дает число π с 35 десятичными знаками. Голландские математики Виллеброрд Снелль в 1621 г. и Христиан Гюйгенс в 1654 г. показали, что для приближенного вычисления числа π с большой точностью можно обойтись многоугольниками с меньшим числом сторон. С помощью 96-угольника метод Снелля дает 6 десятичных знаков для π, а метод Архимеда – лишь два. По методу Гюйгенса результат Архимеда $\pi \approx 3{,}14$ получается уже с помощью треугольника, а 60-угольник дает 9 десятичных знаков, т. е. $\pi \approx 3{,}141592653$. Соответствующая работа Гюйгенса «О найденной величине круга», которую он написал в возрасте около 25 лет, помещена в сборнике [101] после работы Архимеда «Об измерении круга». Работа Гюйгенса, написанная в античном духе, поражает обилием новых теорем, касающихся выражения площади круга и длины окружности с помощью вписанных и описанных многоугольников, и является одной из лучших в мировой литературе работ по элементарной геометрии.

Дальнейшие результаты по вычислению числа π получены уже с помощью ряда $\operatorname{arctg}x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots$. При $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ английский математик и астроном Абрагам Шарп в 1705 г. вычислил $\frac{\pi}{6}$ с 72 десятичными знаками. Исходя из формулы $\frac{\pi}{4} = 4\operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ и ряда для $\operatorname{arctg}x$, английский математик Джон Мечин в 1706 г. вычислил π со 100 десятичными знаками. В том же году английский математик Уильям Джонс опубликовал ряд Мечина (без указания способа его получения Мечином) и впервые

употребил букву π для обозначения отношения длины окружности к ее диаметру. Это обозначение затем систематически употреблял Эйлер, и оно стало общепринятым.

Французский математик де Ланьи по методу Шарпа вычислил в 1719 г. 127 десятичных знаков числа π. Эйлер привел это приближение во «Введении в анализ бесконечных». В своей работе де Ланьи высказал, но не доказал утверждение, что если дуга $x \neq 0$ рациональна, то $\mathrm{tg}x$ иррационален, или, что эквивалентно, если $\mathrm{tg}x$ $(x \neq 0)$ рационален, то дуга x иррациональна.

Ламберт разлагает $\mathrm{tg}x$ в бесконечную цепную дробь вида

$$\mathrm{tg}x = \cfrac{1}{\cfrac{1}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{3}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{5}{x} - \cfrac{1}{\cfrac{7}{x} - \dots}}}}.$$

Из того, что при $\frac{m}{n} \neq 0$ рациональных $\mathrm{tg}\frac{m}{n}$ изображается сходящейся бесконечной цепной дробью, Ламберт заключает, что при $\frac{m}{n} \neq 0$ рациональных $\mathrm{tg}\,x$ иррационален, поэтому если $\mathrm{tg}x$ $(x \neq 0)$ рационален, то x иррационально. Но $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ рационален, следовательно, π – иррационально. Отметим, что в процессе доказательства Ламберт впервые исследует (на примерах для $\mathrm{tg}1$ и $\mathrm{tg}\frac{2}{3}$) сходимость бесконечных цепных дробей, представля эти дроби в виде ряда, который мы можем записать в виде $\delta_0 + (\delta_1 - \delta_0) + (\delta_2 - \delta_1) + \ldots + (\delta_k - \delta_{k-1}) + \ldots$, где $\delta_k = \frac{P_k}{Q_k}$ есть k-я подходящая дробь для бесконечной цепной дроби, т. е. k-е рациональное прибли-

жение бесконечной цепной дроби конечной дробью. Ламберт получает сходимость указанных рядов из сравнения их членов с членами убывающей геометрической прогрессии.

Французский математик А. М. Лежандр (1752–1833) доказывает иррациональность числа π (а также π^2) несколько по-иному в своих «Началах геометрии» (см. отрывок из этой книги в [101]). Он путем преобразования некоторого степенного ряда получает разложения в цепные дроби функций

$$\mathrm{th}x = \cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\cfrac{x^2}{7+\ldots}}}} \quad \text{и} \quad \mathrm{tg}x = \cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\ldots}}}}.$$

Затем он доказывает в двух леммах, что если в бесконечной цепной дроби $\cfrac{m}{n+\cfrac{m'}{n'+\cfrac{m''}{n''+\ldots}}}$, где m, n, m', n' и т. д. – целые числа, все ее звенья $\frac{m}{n}$, $\frac{m'}{n'}$, ... (или хотя бы начиная с некоторого) по абсолютной величине меньше единицы, то значение этой бесконечной дроби есть иррациональное число. Отсюда следует, что при рациональных $\frac{m}{n} \neq 0$ числа $\mathrm{tg}\frac{m}{n}$ иррациональны, а если tgx $(x \neq 0)$ рационально, то x – иррационально. Далее со ссылкой на равенство $\mathrm{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ получается, что число π иррационально. В заключение Лежандр пишет: «Представляется вероятным, что число π даже не принадлежит к классу алгебраических иррациональностей, т. е. что оно не может быть корнем никакого алгебраического уравнения с конечным числом членов, коэффициенты которого рациональны. Но эту теорему, по-

видимому, очень трудно строго доказать». Число, не являющееся корнем никакого многочлена с целыми коэффициентами, называется трансцендентным. И только в 1844 г. французский математик Ж. Лиувилль (1809–1882) доказал, что трансцендентные числа существуют. Французский математик Ш. Эрмит (1822–1901) доказал в 1873 г. трансцендентность числа e. А немецкий математик Ф. Линдеман (1852–1939) в 1882 г. доказал трансцендентность числа π, что означало также и невозможность решения задачи о квадратуре круга с помощью циркуля и линейки. Что же касается иррациональности числа e, то очень простое доказательство этого факта с помощью ряда $e=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$, которое дал французский математик Ж. Б. Фурье (1768–1830), приводится во всех курсах математического анализа в вузах. С доказательством иррациональности числа π без использования цепных дробей, которое предложил в 1947 г. американский математик Айвен Нивен (1915–1999), можно познакомиться по книге: Михелович Ш. Х. Теория чисел. – М.: Высшая школа, 1967. – С. 208–209. Об истории числа π см. [53]. Отметим еще, что Ламберт нашел также разложение функции $\operatorname{arctg} x$ в цепную дробь. А Лагранж получил разложения в цепные дроби для функций $(1+x)^{\alpha}$, $\ln(1+x)$, e^x в результате применения своего способа интегрирования дифференциальных уравнений с помощью цепных дробей. Но лишь в XIX в. были найдены признаки сходимости цепных дробей и детально исследованы области сходимости разложений функций в цепные дроби как на действительной оси, так и в комплексной плоскости. То же самое касается и рядов – числовых и функциональных.

Еще до того, как были введены гиперболические функции, английский математик А. Муавр (1667–1754) заметил, что аналитические задачи для окружности и равносторонней гиперболы связаны посредством мнимых величин. Это связано с тем, что уравнение окружности $x^2+y^2=r^2$ при замене y на iy переходит в уравнение гиперболы $x^2-y^2=r^2$. Хотя Эйлер

и разложил $\dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ и $\dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ в бесконечные произведения, но он не рассматривал эти выражения как самостоятельные функции $\mathrm{ch}x$ и $\mathrm{sh}x$. Впервые их ввел как самостоятельные функции **Винченцо Риккати (1707–1775)**, сын Джакопо Риккати (1676–1754), итальянского математика, имя которого носит известное дифференциальное уравнение. Рассматривая сектор равносторонней гиперболы с полуосью r, В. Риккати определил гиперболические косинус и синус, ввел для них обозначения $\mathrm{ch}x$, $\mathrm{sh}x$, а также установил основное тождество $\mathrm{ch}x^2 - \mathrm{sh}x^2 = r^2$ (сейчас берут $r = 1$) и получил формулы для $\mathrm{ch}(\varphi \pm \psi)$ и $\mathrm{sh}(\varphi \pm \psi)$. Через 10 лет гиперболическую тригонометрию разрабатывает Ламберт, он вычислил и таблицы гиперболических функций.

Эйлер во «Введении в анализ бесконечных» (1748) впервые изложил тригонометрию аналитически как самостоятельный раздел математики, имеющий дело с тригонометрическими функциями, а не с линиями в круге. Вид, близкий к современному, придали также сферической тригонометрии Эйлер в ряде работ и Ламберт в «Очерках об употреблении математики» (1765, 1770) [69, с. 361–368]. К концу XVIII в. плоская и сферическая тригонометрии излагались в учебниках уже почти сплошь аналитически. В России учеником Эйлера М. Я. Головиным было написано прекрасное руководство «Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами» (1789).

В XVIII в. был достигнут существенный прогресс в разработке теории параллельных линий, которой еще в IX–XIII вв. занимались многие арабские математики (Ибн ал-Хайсам, Омар Хайям, ат-Туси и др.). Продвижения в этом вопросе достиг итальянский математик монах **Джироламо Саккери (1667–1733)**, преподававший математику в иезуитских колледжах в Италии, а значительно больших успехов – Ламберт. Вопрос, как и раньше, заключался в том, чтобы с помощью остальных аксиом геометрии Евклида вывести V постулат Евклида: если две прямые, пересекаясь с третьей, образуют с ней внутренние односторонние углы, сумма которых меньше $2d$ (т. е. двух

прямых углов), то эти две прямые пересекаются с той стороны, с которой эта сумма меньше $2d$. Выполнение V постулата равносильно утверждению (аксиоме параллельности): через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

В работе «Евклид, очищенный от всех пятен» (1733) Саккери критикует доказательство V постулата, данное в XIII в. Насир ад-Дином ат-Туси, и пытается доказать V постулат. Он берет четырехугольник, который рассматривал ат-Туси, а еще раньше, в 1077 г., Хайям, с двумя равными боковыми сторонами и прямыми углами при основании и аналогично выдвигает следующие три возможные гипотезы относительно его верхних углов: либо они оба тупые, либо прямые, либо острые. Эти гипотезы он называет, соответственно, гипотезами тупого, прямого и острого углов. Саккери показывает, что если какая-либо из них выполняется для какого-нибудь четырехугольника указанного типа, то она выполняется и для всех четырехугольников такого типа. Далее он получает, что при гипотезе тупого угла сумма углов всякого треугольника больше $2d$, при гипотезе прямого угла – равна $2d$, а при гипотезе острого угла – меньше $2d$. Затем доказывается, что при гипотезе прямого угла выполняется V постулат. Случай тупого угла Саккери находит противоречивым. Он пытается опровергнуть и гипотезу острого угла, выводя из нее ряд следствий и надеясь прийти к противоречию. Он посвящает этой гипотезе около 80 страниц. С безупречной строгостью он показывает, что при гипотезе острого угла перпендикуляры к одной из сторон угла сначала пересекают вторую сторону, а затем, по мере удаления от вершины, найдется первый перпендикуляр, не пересекающий вторую сторону угла, и дальнейшие перпендикуляры ее не пересекают. При гипотезе острого угла две непересекающиеся прямые, находящиеся в одной плоскости, либо бесконечно удаляются друг от друга в одну сторону и неопределенно сближаются в другую сторону, либо имеют общий перпендикуляр, по обе стороны от которого они бесконечно удаляются друг от друга. Это уже факты геометрии Лобачевского. Саккери также известно,

что в случае гипотезы острого угла совокупность точек, равноудаленных от данной прямой, является не прямой, а кривой (он называет ее эквидистантой, т. е. «равноудаленной» от базы – прямой). Однако, вычисляя с помощью бесконечно малых длину куска эквидистанты, Саккери ошибочно находит ее равной длине ее прямолинейной проекции, поэтому отбрасывает и гипотезу острого угла, выражая удивление по поводу трудности ее опровержения.

Существенно дальше продвинулся И. Г. Ламберт в своем трактате «Теория параллельных линий» (1786) [2, с. 271–277]. Он берет четырехугольник, который рассматривал уже Ибн ал-Хайсам (965–1039), с тремя прямыми углами, а относительно четвертого угла выдвигает три гипотезы: I) он прямой, II) он тупой, III) он острый. Ламберт показывает, что в случае гипотезы прямого угла выполняется V постулат. В случае гипотезы тупого угла две прямые, перпендикулярные третьей, пересекаются по обе стороны от перпендикуляра, т. е. в двух точках, вопреки известной аксиоме о прямых, поэтому гипотезу тупого угла Ламберт отвергает. Но при этом он отмечает, что гипотеза тупого угла выполняется на сфере, если в качестве прямых рассматривать большие окружности – сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр. (Заметим, что одной из неевклидовых геометрий является геометрия Римана. Метрические свойства плоскости Римана «в малом» совпадают с метрическими свойствами небольшого куска сферы, а в целом модель плоскости Римана можно получить «отождествлением» диаметрально противоположных точек сферы. Число $K=\frac{1}{R^2}$, где R – радиус сферы, называется кривизной плоскости Римана.) Переходя к рассмотрению гипотезы острого угла, Ламберт пишет: «Однако невозможно даже предвидеть, как может быть доказана возможность этой гипотезы. Поэтому я только опишу то, что я нашел». А нашел он больше следствий этой гипотезы, чем Саккери. В частности, следствиями гипотезы острого угла у Ламберта являются:

а) в каждом треугольнике сумма углов меньше $2d$ (§ 73), т. е. меньше двух прямых улов;

б) существует некая абсолютная мера длины, т. е. существует некоторый отрезок фиксированной длины k, определяемый самой плоскостью. (Аналогично на сфере радиуса R такой абсолютной мерой является дуга, длина которой равна радиусу R большого круга, а на плоскости Евклида абсолютной угловой мерой является прямой угол. Абсолютная мера длины как на сфере, так и на плоскости Лобачевского связана с их гауссовой кривизной: для сферы $K=\frac{1}{R^2}$, а для плоскости Лобачевского $K=-\frac{1}{k^2}$. Для евклидовой плоскости $K=0$ и абсолютная мера длины отсутствует.);

в) при гипотезе острого угла для любого треугольника с углами α, β, γ «угловой дефект» $\delta=2d-(\alpha+\beta+\gamma)$ пропорционален площади треугольника (§ 81). Аналогично в случае гипотезы тупого угла «угловой избыток» $\varepsilon=(\alpha+\beta+\gamma)-2d$ пропорционален площади треугольника (§ 82). Формула $S=R^2\varepsilon$ для площади сферического треугольника была известна с 1629 г., когда ее нашел А. Жирар. Ламберт заключает: «Я почти должен был бы сделать из этого вывод, что третья гипотеза (т. е. гипотеза острого угла) имеет место на какой-то мнимой сфере. По меньшей мере должно же быть что-то, из-за чего она на плоскостях так долго не позволяет себя опровергнуть, как это имело место со второй гипотезой (т. е. с гипотезой тупого угла)» [2, с. 276]. В XIX в. эти факты нашли прямое подтверждение в неевклидовой геометрии Лобачевского. Таким образом, Ламберт вплотную приблизился к ней, но не продвинулся дальше. Уже около 1816 г. **К. Ф. Гаусс (1777–1855)** владел основными фактами неевклидовой геометрии, но ничего не публиковал об этом. В 1825–1826 гг. немецкий математик **Ф. А. Тауринус (1794–1874)** впервые опубликовал тригонометрию гиперболической плоскости (плоскости Лобачевского), получив ее формально из сферической тригонометрии заменой радиуса R сферы чисто мнимым радиусом qi и тем самым

реализовал предположение, высказанное Ламбертом в 1786 г. **Н. И. Лобачевский (1792–1856)** построил основы своей геометрии в 1823–1824 гг., впервые доложил о ней в 1826 г., а начал публиковать ее математическое изложение с 1829 г. Венгерский математик **Я. Бояи (1802–1860)** в 1832 г. опубликовал свою разработку неевклидовой геометрии в качестве приложения («Аппендикс») к курсу математики своего отца, менее полную, чем у Лобачевского [51; 121].

Из других достижений Ламберта отметим его результаты в теории чисел: он указал правила отыскания простых чисел и составил таблицу простых чисел до 101971, а также таблицу делителей чисел от 1 до 102000; указал правила, позволяющие определить, является ли натуральное число квадратом другого натурального числа. Кроме того, в анализе имя Ламберта носит ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{x^n}{1-x^n}$, сходимость которого он исследовал. В частности, при $a_n = 1$ получается ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{1-x^n} = \sum_{k=1}^{\infty} \tau(k) x^k$, где $\tau(k)$ равно числу всех натуральных делителей числа k, здесь $\tau(1) = 1$, а при $k \neq 1$ простом $\tau(k) = 2$. В алгебре Ламберту принадлежат два оригинальных метода приближенного вычисления корней алгебраических уравнений.

О Ламберте: [101; 2, с. 271–277; 1, т. 3, с. 111–112, 217–218; 121, с. 158–164; 51, с. 94–97; 97, с. 93–101].

— Лежандр —

Одним из выдающихся математиков конца XVIII в. и первой трети XIX в. является французский математик **Адриен Мари Лежандр (1752–1833)**. Он окончил Коллеж Мазарини, в 1775–1780 гг. преподавал в Парижской Военной школе, в 1788–1815 гг. был экзаменатором Политехнической школы, а с 1816 г. – профессором этого вуза, в 1813–1833 гг. – член Бюро долгот. Огромной популярностью пользовались его труды, посвященные эллиптическим интегралам, теории чисел и элементарной геометрии.

Свои исследования эллиптических интегралов Лежандр изложил в «Мемуаре об эллиптических трансцендентных» в 1792 г., опубликованном в 1793–1794 гг., в «Упражнениях по интегральному исчислению» (1811), а высшим итогом развития эллиптических интегралов в XVIII в. и начале XIX в. явился принадлежащий Лежандру двухтомный «Трактат об эллиптических функциях и эйлеровых интегралах» (1825–1828). Эллиптическими функциями Лежандр называет эллиптические интегралы. Но в 20-х гг. XIX в. Абель и Якоби термином «эллиптические функции» называют обращения эллиптических интегралов и именно в этом смысле он сохранился в дальнейшем. Разработка теории эллиптических функций, начатая Гауссом в конце XVIII в. (о ней он никому не сообщал) и глубоко развитая Абелем и Якоби в их бурном соревновании в 20-х гг. XIX в., была одним из главных вопросов математики в течение всего XIX в., а работа Лежандра, касающаяся эллиптических интегралов, по духу скорее принадлежала XVIII веку. Эллиптическими интегралами называются интегралы вида $\int R(x,\sqrt{P(x)})dx$, где $R(x,y)$ – рациональная функция, $P(x)$ – многочлен 4-й или 3-й степени, не имеющий кратных корней. Лежандр показал, что любой эллиптический интеграл может быть сведен к одному из трех видов:

I) $F=\int\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$, II) $G=\int\frac{A+B\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}d\varphi$,

III) $H=\int\frac{(A+B\sin^2\varphi)d\varphi}{(1+n\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$.

Здесь число k $(0<k<1)$ называется модулем, а n – параметром интеграла. Подстановка $z=\sin\varphi$ сводит эти интегралы к алгебраическому виду. В настоящее время нормальными эллиптическими интегралами Лежандра (неполными) называются интегралы:

I рода: $F(\varphi,k)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=\int\limits_0^{z}\frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\tilde{F}(z,k)$;

II рода: $E(\varphi,k)=\int\limits_0^{\varphi}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\int\limits_0^{z}\sqrt{\frac{1-k^2z^2}{1-z^2}}dz=\tilde{E}(z,k)$;

III рода: $\pi(\varphi,c,k)=\int\limits_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{(1+c^2\sin^2\varphi)\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}=$

$$=\int\limits_0^{z}\frac{dz}{(1+c^2z^2)\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}=\tilde{\pi}(z,c,k),\quad c\neq 0,$$

где $z=\sin\varphi$. Лежандр вводит и так называемые полные эллиптические интегралы I и II рода:

$$K=K(k)=F\left(\frac{\pi}{2},k\right),\quad E=E(k)=E\left(\frac{\pi}{2},k\right),$$

соответствующие значению $\varphi=\frac{\pi}{2}$. Название «эллиптический» связано с тем, что длина дуги эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (его удобно здесь задать параметрически в виде $x=a\sin t$, $y=b\cos t$) выражается эллиптическим интегралом II рода $s=a\int\limits_0^{t}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin t}\,dt=aE(t,\varepsilon)$, где $\varepsilon=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$ – эксцентриситет эллипса, а длина полного обвода эллипса равна $4aE(\varepsilon)$. Длина дуги синусоиды, гиперболы, улитки Паскаля и лемнискаты Бернулли также выражается в виде эллиптических интегралов. Теоремы сложения эллиптических интегралов в алгебраическом виде получил Эйлер. Для интегралов I рода Лежандр выводит теорему сложения вида $F(\varphi,k)\pm F(\psi,k)=F(\mu,k)$, где $\cos\mu=\cos\varphi\cos\psi\pm\sin\varphi\sin\psi\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}$. Он протабулировал полные интегралы K и E как функции от k, нашел дифференциальное уравнение 2-го порядка, которым они удовлетворяют, и дал разложения K и E в ряды по степеням k. Число $k'=\sqrt{1-k^2}$ называется дополнительным модулем эллип-

тических интегралов. Введя обозначения $K'(k)=K(k')$, $E'(k)=E(k')$, Лежандр исследовал связи между K, E и K', E', в частности нашел соотношение $EK'+E'K-KK'=\frac{\pi}{2}$, которое носит его имя. Начальные сведения об эллиптических интегралах, их приложениях и свойствах см., например, в учебном пособии: Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.: Наука, 1970. – Т. 2.

Лежандр занимался также исследованием интегралов $B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx$ и $\Gamma(p)=\int_0^{+\infty} x^{p-1}e^{-x}dx$, он дал им названия, соответственно, интегралов Эйлера I и II рода, а также ввел обозначение $\Gamma(p)$ в 1814 г. (Обозначение $B(p,q)$ введено французским математиком Бине в 1839 г.) Имя Лежандра носит найденная им «формула удвоения» $\Gamma(a)\Gamma\left(a+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2\pi}\,2^{-2a+\frac{1}{2}}\Gamma(2a)$. Лежандр составил таблицу значений $\lg\Gamma(p)$ для p от 1 до 2 через 0,001 с 12 десятичными знаками.

В работах Лежандра «Исследования о притяжении однородных сфероидов» (1785) и «Исследования о фигуре планет» (1784, опубликовано в 1787), основные результаты которых, как пишет Лежандр, были получены им до 1782 г., рассматривается проблема притяжения однородным эллипсоидом точки, находящейся вне эллипсоида. Сила притяжения точки эллипсоидом в направлении радиус-вектора этой точки выражается с точностью до числового множителя ньютоновским объемным потенциалом, который в сферической системе координат имеет вид $\iiint\frac{R^2\sin\theta' dRd\varphi' d\theta'}{\sqrt{r^2-2rR\cos\gamma+R^2}}$, где $\cos\gamma=\cos\theta\cos\theta'+\sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$.

Здесь γ – угол между радиус-векторами притягиваемой точки $A(r,\varphi,\theta)$ вне эллипсоида и произвольной точки $M(R,\ \varphi',\ \theta')$ эллипсоида,

а радикал равен расстоянию между точками A и M. Лежандр разлагает функцию $\frac{1}{\sqrt{r^2 - 2rR\cos\gamma + R^2}}$ в ряд по степеням $\frac{R}{r}$, коэффициенты этого ряда представляют собой полиномы $P_n(x)$, где $x = \cos\gamma$. В настоящее время полиномы Лежандра $P_n(x)$ определяют через производящую функцию $\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$. Он доказывает для них ряд свойств, в частности свойство ортогональности, а также устанавливает связь $P_n(\cos\varphi)$ с $P_n(\cos\gamma)$. Параллельно с Лежандром теорией потенциала занимался Лаплас (1749–1827), получивший так называемые сферические функции в качестве решений уравнения $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$, которое называется уравнением Лапласа. Функции $P_n(\cos\theta)$, впервые найденные Лежандром, представляют собой сферические функции в частном случае. Формулу $P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ в 1816 г. впервые дал французский математик и экономист О. Родриг, она носит его имя.

В «Мемуаре о способах различения максимумов и минимумов в вариационном исчислении» (1786) Лежандр впервые получил достаточное условие экстремума функционала, позволяющее установить, дает ли кривая, удовлетворяющая уравнению Эйлера (т. е. экстремаль), максимум или минимум функционалу. Лежандр использует аналогию с достаточными условиями экстремума функции $y(x)$ по знаку y'': при выполнении необходимого условия $y'(x_0) = 0$ достаточным условием минимума (максимума) функции $y(x)$ в точке x_0 является условие $y''(x_0) > 0$ ($y''(x_0) < 0$). Для функционала $J(y)$ роль точки, подозрительной на экстремум, играет кривая – экстремаль, а вместо производной выступает его вариация. Покажем, как

Лежандр получает свое условие в случае задачи с закрепленными концами для функционала $J(y)=\int_a^b f(x,y,y')dx$. Рассмотрим разность $\int_a^b f(x,y+\delta y,y'+\delta y')dx-\int_a^b f(x,y,y')dx$, где δy – приращение ординаты кривой $y(x)$, а $\delta y'$ – приращение производной. Если эта разность положительна для всех достаточно малых δy, $\delta y'$, то $J(y)$ имеет на кривой $y(x)$ минимум, а если отрицательна, то максимум. По формуле Тейлора с точностью до бесконечно малых второго порядка малости относительно δy, $\delta y'$ эта разность записывается в виде

$$\int_a^b (f_y\delta y+f_{y'}\delta y')dx+\frac{1}{2}\int_a^b (f_{yy}(\delta y)^2+2f_{yy'}\delta y\delta y'+f_{y'y'}(\delta y')^2)dx=$$

$$=\delta J+\frac{1}{2}\delta^2 J.$$

Условие $\delta J=0$ необходимо для экстремума функционала, оно выполняется, как показал ранее Лагранж, на кривых, удовлетворяющих уравнению Эйлера $f_y-\frac{d}{dx}f_{y'}=0$. Условие $\delta^2 J>0$ достаточно для минимума функционала, а $\delta^2 J<0$ для максимума. Полагая $\eta=\delta y$, $\eta'=(\delta y)'=\delta y'$, $P=f_{yy}$, $Q=f_{yy'}$, $R=f_{y'y'}$, запишем вторую вариацию $\delta^2 J$ в виде $\delta^2 J=\int_a^b (P\eta^2+2Q\eta\eta'+R\eta'^2)dx$. Желая выделить под знаком интеграла множитель в виде квадрата некоторой функции, Лежандр прибавляет к интегралу выражение $\int_a^b \frac{d}{dx}(V\eta^2)dx=V\eta^2\Big|_a^b=0$ (здесь $\eta(a)=\eta(b)=0$, поскольку

концы a и b закреплены), т. е. $\int_a^b \left(\frac{dV}{dx}\eta^2 + 2V\eta\eta' \right) dx = 0$. Тогда

$$\delta^2 J = \int_a^b \left[\left(P + \frac{dV}{dx} \right) \eta^2 + 2(Q+V)\eta\eta' + R\eta'^2 \right] dx =$$

$$= \int_a^b R \left(\frac{P + \frac{dV}{dx}}{R} \eta^2 + 2\frac{Q+V}{R}\eta\eta' + \eta'^2 \right) dx = \int_a^b R \left(\frac{Q+V}{R}\eta + \eta' \right)^2 dx$$ при условии,

что $\frac{P + \frac{dV}{dx}}{R} = \left(\frac{Q+V}{R} \right)^2$, т. е. $R\left(P + \frac{dV}{dx} \right) = (Q+V)^2$ (уравнение типа Риккати относительно V). Таким образом,

$\delta^2 J = \int_a^b f_{y'y'} \left(\frac{f_{yy'} + V}{f_{y'y'}} \delta y + \delta y' \right)^2 dx$, где в качестве V нужно взять решение уравнения $f_{y'y'}\left(f_{yy} + \frac{dV}{dx} \right) = (f_{yy'} + V)^2$. Отсюда Лежандр делает вывод, что если существует решение V указанного дифференциального уравнения, то условие $f_{y'y'} > 0$ достаточно для минимума интеграла $J(y)$, а условие $f_{y'y'} < 0$ – для максимума. В случае задачи со свободными концами x_1, x_2 Лежандр еще дополнительно требует, чтобы функция V удовлетворяла условию $V(\delta y)^2 \Big|_{x_1}^{x_2} = 0$. Для задачи на экстремум функционала $\int_a^b f(x, y, y', y'')dx$ Лежандр ввел три вспомогательные функции V, V_1, V_2, которые должны удовлетворять системе из трех дифференциальных уравнений. Аналогично он рассмотрел и задачу на экстремум $\int_a^b f(x, y, y', ..., y^{(n)})dx$, тогда $\delta^2 J = \int_a^b f_{y^{(n)}y^{(n)}} \omega^2 dx$. В XVIII в. не было ясно,

существует ли решение вспомогательных дифференциальных уравнений Лежандра, а также на каких отрезках условие Лежандра применимо, т. к. иногда оно отказывало при замене отрезка более широким. Эти недостатки устранил в 1837 г. Якоби.

В XVIII в. вариационное исчисление относили к исчислению бесконечно малых, т. е. к математическому анализу. Из других достижений Лежандра в области математического анализа отметим еще следующие. Имя Лежандра носит введенное им преобразование вида $t = y'_x$, $u = xy'_x - y$ для замены переменной x и функции $y(x)$ новой переменной t и функцией $u(t)$. Это преобразование содержит производные и обладает свойством взаимности: $x = u'_t$, $y = tu'_t - u$ (сохраняет касание). Такие преобразования носят название касательных (или контактных) преобразований и играют важную роль в механике, в групповом анализе дифференциальных уравнений и в геометрии. В XIX в. касательные преобразования детально изучал выдающийся норвежский математик С. Ли (1842–1899). Лежандр применил к обработке результатов наблюдения и впервые опубликовал в 1805–1806 гг., хотя и без обоснования, найденный им, независимо от Гаусса, метод наименьших квадратов. Гаусс пользовался этим методом лет за десять до Лежандра, а в 1821 и 1823 гг. опубликовал его обоснование.

В «Опыте теории чисел» (1797–1798) Лежандр впервые приступает к систематическому изложению теории чисел. Том I начинается с изложения уже сильно развитого диофантова анализа. В первом же издании своей книги Лежандр с помощью символа $\left(\frac{a}{p}\right)$, который носит его имя, дает современную формулировку закона взаимности, вводя также этот термин, и дает доказательство этого закона. На неполноту этого доказательства обратил внимание Гаусс в «Арифметических исследованиях» (1801), который уже здесь привел два доказательства закона взаимности. В следующих изданиях Лежандр отчасти учитывает и результаты Гаусса. В 1830 г. вышло

переработанное и дополненное издание под названием «Теория чисел» в двух больших томах. Во II томе излагается теория решений неопределенных квадратных и кубических уравнений в целых числах. В оригинальном изложении приводятся результаты Гаусса об уравнении деления окружности $x^n = 1$. Приведено также доказательство Великой теоремы Ферма для случая $n = 5$, его частично осуществил в 1825 г. 20-летний Дирихле, а закончил 73-летний Лежандр. Во II издании книги в 1808 г. Лежандр для функции $\pi(x)$, выражающей число простых чисел, не превосходящих x, дал первую приближенную формулу $\pi(x) \approx \dfrac{x}{\ln x - 1{,}08366}$. Он нашел ее эмпирически по таблице простых чисел до 400000 и безуспешно пытался обосновать ее средствами математического анализа. Гаусс также эмпирически подобрал лучшее приближение $\pi(x) \approx \int_2^x \dfrac{dt}{\ln t}$, но не смог его обосновать теоретически. Первого успеха в доказательстве закона распределения простых чисел добился П. Л. Чебышёв в 1848 г. Уже в первом издании своей книги в 1798 г. Лежандр сделал попытку доказать теорему, которую в 1783 г. высказал Эйлер без доказательства: в любой арифметической прогрессии $na + b$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, где целые числа a и b взаимно просты, содержится бесконечно много простых чисел. Строгое доказательство этой теоремы является сложным, его впервые дал Дирихле в 1837 г.

Лежандр высоко оценил выдающийся результат в теории чисел, который получила французская женщина-математик **Софи Жермен (1776–1831)**, продвинувшаяся в доказательстве Великой теоремы Ферма. Софи родилась в Париже в семье торговца. Отец поначалу препятствовал ей в занятиях математикой. В 1794 г. в Париже открылось высшее учебное заведение – Политехническая школа, но женщин туда не принимали. Софи училась там под видом студента Леблана, оставившего занятия, о чем руководство вуза вначале не знало. Она получала задания и присылала решения.

Несколько лет Софи упорно трудилась над доказательством Великой теоремы Ферма, а потом показала свой результат Лежандру. Он включил его под ее именем в свою «Теорию чисел» (1827), и Жермен стала знаменитой. Лежандр расширил ее результат, о чем упоминалось выше в очерке о Ферма. Под псевдонимом Леблан она переписывалась с Гауссом, который был уверен, что переписывается с мужчиной, и пришел в восторг, когда узнал, что это женщина. За исследования в теории упругости по изгибу пластинок Софи Жермен получила в 1811 г. премию Парижской академии наук – первую премию, выданную женщине. О теореме Софи Жермен см. в цитировавшихся выше в очерке о Ферма книгах Г. Эдвардса и М. М. Постникова, а о жизненном пути – в книге С. Сингха «Великая теорема Ферма».

Огромной популярностью, благодаря доступной и четкой переработке ряда книг Евклида, пользовался в конце XVIII в. и в XIX в. учебник элементарной геометрии Лежандра «Начала геометрии». Он впервые был издан в 1794 г. и еще при жизни Лежандра, до 1833 г., выдержал 14 французских изданий. В истории неевклидовой геометрии важное место занимает теория параллельных Лежандра, изложенная им в нескольких вариантах в ряде изданий этого учебника. Лежандр пытается доказать V постулат Евклида на основе других аксиом. В первом издании он «доказывает», что перпендикуляр и наклонная обязательно пересекаются, и отсюда выводит V постулат. В геометрии Лобачевского не всегда так, впервые это заметил еще Саккери в 1733 г. Русский математик и механик Семен Емельянович Гурьев (1764–1813) в своем учебнике «Опыт о усовершенствовании элементов геометрии» (1798) утверждает, что вывод Лежандра о пересечении наклонной и перпендикуляра к прямой не обоснован, но при попытке исправить его сам допускает аналогичную ошибку. В третьем издании Лежандр выводит V постулат из утверждения о том, что сумма углов любого треугольника равна $2d$, т. е. двум прямым углам. Предполагая самоочевидным, что прямая имеет бесконечную длину, он четко доказывает, что сумма углов треугольника не может быть больше $2d$. (Заметим, что в геометрии

Римана, как и в геометрии на сфере, сумма углов любого треугольника больше $2d$, а «прямые» (геодезические) имеют конечную длину.) Далее Лежандр пытается доказать, что сумма углов треугольника не может быть и меньше $2d$. При этом он опирается на утверждение, что через точку внутри острого угла можно провести прямую, пересекающую обе стороны угла. Оно равносильно V постулату Евклида. Из этого утверждения выводили V постулат еще древнегреческий математик Симпликий (VI в.) и арабские математики ал-Джаухари (IX в.), ат-Туси (XIII в.), но во время Лежандра об этом не было известно. В 12-м издании Лежандр привел новое «доказательство» того, что сумма углов треугольника не может быть меньше $2d$. В 1833 г. Лежандр изложил свои соображения по теории параллельных в большой статье в «Мемуарах Парижской АН». Там он, в частности, приводит факт, установленный уже Саккери: если сумма углов в каком-нибудь треугольнике равна $2d$, то она равна $2d$ и в любом треугольнике, а если в некотором треугольнике сумма углов меньше $2d$, то она меньше $2d$ и в любом треугольнике. В XIX в. доказательство этого факта связывали с именем Лежандра, т. к. работа Саккери была забыта. Ее вновь обнаружил итальянский математик Э. Бельтрами (1835–1900), который в 1868 г. дал интерпретацию геометрии Лобачевского на псевдосфере. В указанной статье Лежандр приводит еще одно «доказательство» V постулата, основанное на так называемом «принципе однородности», на несостоятельность которого указал Гаусс в письме к Герлингу. Рассуждения Лежандра в теории параллельных представляют интерес лишь в отношении того, как можно доказать V постулат Евклида с помощью равносильных ему утверждений. Лежандр не пришел к идее создания неевклидовой геометрии, которая в последние годы его жизни была создана другими математиками.

В связи с введением во Франции в период Великой французской революции (1789–1794) метрической (десятичной) системы мер было решено перейти на десятичное деление углов: прямой угол делился не на 90°, а на 100 градов, каждый из которых, в свою очередь, делился на 100 частей. Такая

система деления углов была принята и в «Началах геометрии» Лежандра. Председателем грандиозного проекта составления математических таблиц был инженер и математик маркиз Риш де Прони, а руководителями, выбиравшими методы расчетов, – крупные математики Лагранж, Лежандр, астроном Деламбр и др. К 1794 г., примерно за 3 года, было составлено 17 томов таблиц, в том числе 14-значные таблицы логарифмов чисел до 200000, 14-значные таблицы логарифмов синусов и тангенсов для стотысячных долей прямого угла. Эти таблицы не были напечатаны как из-за финансовых затруднений, так и в силу того, что десятичное деление углов не привилось. Впрочем, в 1800 г. вышли меньшие по размерам таблицы для стотысячных долей прямого угла.

Немецкий математик Ф. Клейн (1849–1925) в [140, с. 75–76] приводит Лежандра в качестве примера разностороннего математика, который, будучи на 25 лет старше Гаусса, работал в основном в тех же областях математики, но не достиг в них результатов, полученных Гауссом.

О Лежандре: [1, т. 3, с. 118–120, 219, 220, 359–340, 446–449, 468–470; 69, с. 89, 164, 176, 220, 406; 121, с. 54–69; 51, с. 98–103].

Лаплас

Выдающийся французский математик и астроном **Пьер Симон Лаплас (1749–1827)** родился в крестьянской семье в нормандском городке Бомоне. Благодаря покровительству состоятельных людей, он учился в аристократическом бомонском коллеже монашеского ордена бенедиктинцев, где самостоятельно изучал «Начала» Ньютона, с увлечением читал «Энциклопедию», а в 17 лет написал первую работу по математике. Окончив учебу, Лаплас в 1766 г. переехал в Париж и обратил на себя внимание Д'Аламбера, по рекомендации которого был избран в возрасте 24 лет на должность адъюнкт-механика в Парижскую академию. Лаплас становится преподавателем математики в Военной школе в Париже. Там же преподавал начертательную геометрию знаменитый французский математик Г. Монж (1746– 1818).

Одним из их слушателей был Наполеон Бонапарт. В 70–80-х гг. XVIII в. Лаплас публикует ряд работ по теории вероятностей, теории уравнений с частными производными, теории потенциала, по небесной механике. Во время революции декретом Национального собрания была назначена комиссия из академиков по введению метрической системы мер и весов, в нее вошли: Лаплас (председатель), Лагранж, Монж, Кондорсе и др. Для введения метра как $\frac{1}{40\cdot 10^6}$ части земного меридиана было решено измерить расстояние между Барселоной и Дюнкерком (свыше 1000 км). За единицу массы в 1 кг принималась масса кубического дециметра дистиллированной воды, опыты по ее измерению проводил знаменитый химик Лавуазье (1743–1794). Июнь 1793 – июль 1794 г. – период якобинской диктатуры, борьба с интервенцией и внутренней контрреволюцией, время террора и «чисток». Лаплас, Лавуазье и некоторые другие были выведены из комиссии мер и весов по «недостатку республиканской доблести и слабой ненависти к королям». В это трудное время Лаплас весной 1793 г. уезжает с семьей в г. Мелен, где пишет книгу по астрономии «Изложение системы мира». Непременный секретарь Парижской АН Кондорсе был арестован якобинцами и покончил с собой в тюрьме, отравившись, чтобы избежать эшафота. Были гильотинированы почетные академики – близкие друзья Лапласа: химик Лавуазье и астрономы Байи и Бошар де Сарон.

Осенью 1794 г. была создана Нормальная школа для подготовки преподавателей. Тогда же в Париж вернулся Лаплас, а с 1795 г. начал преподавать в ней. Кроме него, здесь стали преподавать математику Лагранж и Монж. В 1795 г. было создано Бюро долгот, куда вошли и математики Лаплас и Лагранж. Лаплас был назначен президентом Палаты мер и весов. В том же году вместо упраздненных якобинцами академий был создан Институт Франции, одним из главных его основателей был Монж, в подсекцию математики вошли также Лагранж, Лаплас и Лежандр. В 1796 г. опубликована книга Лапласа «Изложение системы мира». Этот труд объемом

более 400 страниц – блестяще написанное первое популярное изложение всей астрономии. В примечаниях к последней главе книги Лаплас приводит свою знаменитую теорию происхождения Солнечной системы. После возвращения в Париж Лаплас приступает к написанию грандиозной 5-томной «Небесной механики», с 1799 г. по 1805 г. опубликовано 4 тома, а последний – в 1825 г. Здесь Лаплас подвел итоги исследований по механике движения небесных тел, начиная с достижений Ньютона и заканчивая своими собственными. Весной 1799 г. была введена метрическая система мер. Осенью того же года Наполеон совершил государственный переворот и занял диктаторское положение первого консула. Лапласа он назначил министром внутренних дел, но через полтора месяца уволил с этого поста и сделал сенатором. В ссылке на острове Св. Елены в своих воспоминаниях Наполеон писал о Лапласе как министре следующее: «Первоклассный геометр вскоре заявил себя администратором более чем посредственным… Он везде искал какие-то субтильности, мелочи, идеи его отличались загадочностью, наконец, он весь был проникнут духом «бесконечно малых», который он вносил в администрацию» [103, с. 175]. Вскоре Лаплас был назначен вице-президентом Сената, а с 1803 г. – канцлером, но отличился он здесь только упразднением революционного календаря, действовавшего 12 лет. Одним из первых Лаплас был удостоен ордена Почетного легиона, введенного Наполеоном. Из числа математиков Лаплас, Монж, Карно, Фурье и Лагранж были возведены Наполеоном в графы, а Пуассон получил более низкий титул барона. В 1812 г. Лаплас публикует свою «Аналитическую теорию вероятностей», а с 1820 г. выходит третье ее издание вместе с «Опытом философии теории вероятностей». В 1814 г. сенаторы, в том числе и Лаплас, голосуют за отречение Наполеона. Период «ста дней» весной 1815 г., когда Наполеон возвратился к власти, Лаплас просидел в своем загородном доме в Аркейе, а после поражения Наполеона под Ватерлоо принес присягу Людовику XVIII. От короля он сразу же получил титул маркиза и звание пэра Франции. В 1817 г. Лаплас, как блестящий стилист, был избран также в качестве «бессмертного»

академика по разряду французского языка и литературы, как и Д'Аламбер в XVIII в. В 1842–1886 гг. опубликовано 7-томное издание сочинений Лапласа, а в 1878–1912 гг. вышло 14-томное издание его сочинений.

Коллеги Лапласа уважали его за научные достижения, но высказывались критически в отношении ряда его человеческих качеств. Выдающийся французский астроном и физик Д. Ф. Араго (1786–1853), хорошо знавший Лапласа, в «Биографиях знаменитых астрономов, физиков и математиков» отмечает, например, что Лаплас тщеславен и завистлив. Несмотря на это, Лаплас и Лагранж поддерживали хорошие отношения друг с другом, хотя много лет соперничали в разработке теории возмущения планетных движений. Лаплас проявлял заботу о начинающих ученых, которые нередко собирались у него дома.

Не касаясь вклада Лапласа в астрономию, кратко охарактеризуем его достижения в математике. Они связаны с дифференциальными уравнениями, теорией вероятностей и конечно-разностными уравнениями. В работе Лапласа «Теория притяжения сфероидов и фигуры планет» (написано в 1782 г., опубликовано в 1785) получает дальнейшее развитие теория потенциала, которой до него занимались Ньютон, Маклорен, Лагранж, Лежандр и др. Наиболее важной заслугой Лапласа в этом вопросе является установление факта, что введенный Лагранжем объемный потенциал тяготения

$$V(x,y,z)=\iiint\limits_{\Omega}\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)\,d\xi d\eta d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}$$ (буквой V его обозначал Лаплас)

удовлетворяет дифференциальному уравнению $\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$,

а также получение и изучение его решений – так называемых сферических функций. Кратко это уравнение записывают в виде $\Delta V=0$ и называют уравнением Лапласа. Впервые оно встречается у Д'Аламбера (в плоском случае) и у Эйлера (в трехмерном) в работах 1761 г. при изучении вопроса о движении жидкости. Позже Лаплас изложил свои результаты в переработан-

ном виде во II томе «Небесной механики» (1799). Переходя к сферическим координатам $(r,\ \varphi,\ \theta)$, Лаплас записывает свое уравнение в виде $\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial V}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2}+r\frac{\partial^2(rV)}{\partial r^2}=0$, где $\mu=\cos\theta$, а вместо φ он пишет ω. Лаплас рассматривает случай, когда точка $(r,\ \varphi,\ \theta)$ находится вне притягивающего ее тела. Он представляет функцию V в виде ряда $V=\frac{u_0}{r}+\frac{u_1}{r^2}+\frac{u_2}{r^3}+\dots$ (Лаплас пишет $u^{(n)}$ вместо u_n, т. к. до XIX в. возможность использования подстрочных индексов была ограничена по типографским соображениям). Подставляя этот ряд в уравнение, Лаплас получает для функций $u_n(\varphi,\theta)$, $n=0,\ 1,\ 2,\dots$, дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial u}{\partial\mu}\right]+\frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+n(n+1)=0,\ \text{где}\ \mu=\cos\theta.$$

Гаусс назвал функции $u_n(\varphi,\theta)$ сферическими функциями, т. к. их можно рассматривать как функции на сфере единичного радиуса. Выражение $T=\frac{1}{\sqrt{r^2-2rR\cos\gamma+R^2}}$ (см. выше в очерке о Лежандре) Лаплас разлагает при $\frac{R}{r}<1$ в ряд $T=\frac{Q_0R}{r}+\frac{Q_1R^2}{r^2}+\frac{Q_2R^3}{r^3}+\dots$, где Q_n – многочлены от $\cos\gamma$, $n=0,\ 1,\ 2,\ \dots$. Далее Лаплас показывает, что $Q_n(\cos\gamma)$ удовлетворяет тому же дифференциальному уравнению, что и u_n, а также находит явное выражение для многочленов $Q_n(x)$, где $x=\cos\gamma$. Подставляя $Q_n(\cos\gamma)$, где Лаплас полагает $\cos\gamma=\sum_{k=0}^{\infty}\beta_k\cos k(\varphi-\varphi')$, в дифференциальное уравнение для u_n, он получает для β_k уравнение

$$\frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{d\beta}{d\mu}\right]-\frac{k^2\beta}{1-\mu^2}+n(n+1)\beta=0;\quad n,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad \mu=\cos\theta.$$

При $k=0$ это обыкновенное дифференциальное уравнение называется уравнением Лежандра, т. к. ему удовлетворяют полиномы Лежандра $P_n(\mu)$, а при $k=1,\ 2,\ \ldots$ – уравнением присоединенных функций $Q_{n,k}(\mu)$ порядка n и ранга k для полиномов Лежандра. Заметим, что Лежандр не получал дифференциального уравнения для своих полиномов. Лаплас находит и явные выражения для присоединенных функций полиномов Лежандра. В той же первой работе Лаплас рассматривает и сферические функции общего вида $Y_n(\varphi,\theta)$, а в 1799 г. доказывает их ортогональность на сфере. В V томе «Небесной механики» (1825) Лаплас получил для полиномов Лежандра представление в виде определенного интеграла и асимптотику для $P_n(\cos\theta)$ при $n\to\infty$. Исследования Лапласа и Лежандра, касающиеся сферических функций, тесно связаны между собой. Но Лаплас первым разработал теорию сферических функций, в частности, полиномов Лежандра, именно как решений дифференциальных уравнений. Лаплас является непосредственным предшественником Фурье в создании метода решения дифференциальных уравнений в частных производных с помощью разделения переменных. Недостатком у Лапласа является то, что он не исследовал сходимости своих разложений в ряды по сферическим функциям, а они, как выяснилось позже, расходятся, когда притягиваемая точка находится на поверхности притягивающего ее эллипсоида. Более простой случай, когда притягиваемая точка находится внутри тела, рассмотрел в 1813 г. французский математик С. Д. Пуассон (1781–1840) с помощью выведенного им так называемого уравнения Пуассона $\Delta u=4\pi\rho$. Исследования Лапласа, Лежандра и Пуассона, касающиеся теории потенциала, послужили основой для теории дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа.

Лаплас внес вклад и в общую теорию дифференциальных уравнений с частными производными. Как уже отмечалось выше в очерке о Лагранже, уравнение первого порядка вида $P(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\dfrac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$ решили: Лаплас в 1773 г. и Лагранж в 1774 г. Метод Лагранжа, состоящий в сведении этого уравнения к системе обыкновенных дифференциальных уравнений $\dfrac{dx}{P}=\dfrac{dy}{Q}=\dfrac{dz}{R}$ («уравнения характеристик»), излагается (при P, Q, R, зависящих от x, y, z) в современных учебниках дифференциальных уравнений. Иной метод решения, получивший впоследствии название «метода каскадов», изложил Лаплас в статье «Исследования по интегральному исчислению в частных интегралах» (написана в 1773, опубликована в 1777). Здесь же Лаплас распространяет свой «метод каскадов» и на дифференциальные уравнения 2-го порядка в частных производных вида $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\alpha\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\beta\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\gamma\dfrac{\partial z}{\partial x}+\delta\dfrac{\partial z}{\partial y}+\lambda z+T=0$, где α, β, γ, δ, λ, T – функции от x, y, причем $\alpha^2>4\beta$, т. е., по нынешней терминологии, уравнение имеет гиперболический тип. Введением двух новых переменных Лаплас приводит это уравнение к виду $D(u)=\dfrac{\partial^2 u}{\partial s\partial s_1}+m\dfrac{\partial u}{\partial s}+n\dfrac{\partial u}{\partial s_1}+lu+T=0$ и оригинально решает его [69, с. 208–209].

В небесной механике часто используются обыкновенные линейные дифференциальные уравнения 2–го порядка, правые части которых – тригонометрические многочлены с коэффициентами, зависящими от малого параметра. Присутствие малых параметров связано с тем, что орбиты планет мало отличаются от круговых, а планеты оказывают друг на друга небольшие воздействия. Приближенные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с малым параметром разрабатывали в XVIII в. Д'Аламбер, Эйлер, Лагранж, Лаплас, Кондорсе и др. Для этого

обычно использовали ряды по возрастающим степеням малого параметра, ограничиваясь несколькими членами [69, с. 192–194]. Лаплас в трех работах 1772–1777 гг. предложил модификацию метода малого параметра, сочетая разложение в ряд с методом вариации постоянных. В работе «Исследования по интегральному исчислению и о системе мира» (написано в 1772, опубликовано в 1776) он иллюстрирует свой метод на примере уравнения $\frac{d^2y}{dt^2} + y = \alpha y \cos 2t$, где α – малый параметр. А в работе 1777 г. он распространяет свой метод на некоторые нелинейные уравнения [1, т. 3, с. 396–399].

Лаплас имеет важные заслуги в теории вероятностей. Но прежде, чем говорить о них, скажем еще немного о теории вероятностей до Лапласа. Предыстория теории вероятностей связана, прежде всего, с именами математиков Кардано, Тартальи и Галилея, которые занимались комбинаторными задачами на подсчет всевозможных исходов при бросании двух или более игральных костей, не располагая еще понятием вероятности. Обычно считают, что теория вероятностей зародилась в переписке Паскаля и Ферма в 1654 г. по вопросу о разделе ставки между игроками в случае, когда игра прекращена до полного выигрыша ставки одним из игроков. В работе Гюйгенса 1657 г. также рассматриваются задачи, связанные с разделением ставок и бросанием игральных костей. Результаты Паскаля, Ферма и Гюйгенса тоже, по существу, относятся к предыстории теории вероятностей, когда еще не сформировалось понятие вероятности. Собственно история теории вероятностей начинается с работы Якоба Бернулли «Искусство предположений» (1773). О главном результате этой работы (закон больших чисел в форме Бернулли, основанный на схеме испытаний Бернулли) говорилось выше в очерке о Я. Бернулли. О вкладе А. Муавра в теорию вероятностей (решение задачи о разорении игрока, локальная и интегральная теоремы Муавра–Лапласа, теорема умножения вероятностей) говорилось выше в очерке о Муавре.

Английский математик **Томас Байес (Бейес, 1702–1761)**, священник, член Лондонского королевского общества, написал две статьи по теории вероятностей, они были опубликованы после его смерти. В первой из них, опубликованной в 1763 г., Байес впервые четко определяет несовместные (по его терминологии – «неплотные») события, «…если наступление одного из них исключает наступление других», и дает первую формулировку теоремы сложения вероятностей в виде: «Если несколько событий являются неплотными, то вероятность того, что наступит какое-то из них, равно сумме вероятностей каждого из них». Этой теоремой пользовались и его предшественники, не формулируя явно понятие несовместности и саму теорему. Байес приводит и формулировку теоремы умножения вероятностей, без сомнения заимствованной у Муавра в виде $P(A/B)=\dfrac{P(AB)}{P(A)}$. Так называемых формул Байеса для вероятностей гипотез после испытания (апостериорных вероятностей) у Байеса нет, т. к. у него отсутствует понятие полной вероятности. «Формулы Байеса» впервые появляются у Лапласа.

В 1774–1786 гг. Лаплас опубликовал 7 мемуаров, посвященных теории вероятностей. Достижения своих предшественников (без указания авторов), а также свои собственные он обобщил и подытожил в большой книге «Аналитическая теория вероятностей» (1812) и реферативном, популярном «Опыте философии теории вероятностей», составившим развернутое введение к книге в изданиях 1814 г. и 1820 г. В первом отделе «Аналитической теории вероятностей» рассматриваются вспомогательные вопросы, производящие функции и их применение к решению конечно-разностных уравнений, вычисление некоторых определенных интегралов, используемых в дальнейшем. Сама теория вероятностей излагается во втором отделе книги. В главе I приводится классическое определение вероятности как отношения количества благоприятных случаев к общему количеству возможных случаев появления события, причем впервые явно отмечается, что случаи должны быть равновероятными. Даются теоремы сложения и умножения вероятно-

стей, формула полной вероятности $P(A)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A/B_k)$, где $B_1, \ldots, B_n$ – полный набор попарно несовместных событий, а событие A может осуществиться с одним и только с одним из событий B_k. Лаплас впервые получает и «формулы Байеса» для апостериорных вероятностей

$$P(B_k/A)=\frac{P(B_k)P(A/B_k)}{\sum_{k=1}^{n}P(B_k)P(A/B_k)},\quad k=1,\ \ldots,n.$$

Лаплас дает и определение математического ожидания. В то время уже была известна аналогия между математическим ожиданием и центром тяжести стержня, на котором сосредоточена масса (дискретная или непрерывная), равная единице. Эту аналогию впервые заметил Н. Бернулли и привел в работе 1709 г.

В главе II Лаплас очень подробно исследует классическую задачу о разорении игрока. В главе III он доказывает предельные теоремы Муавра–Лапласа о сходимости биномиального распределения к нормальному. При этом интегральную теорему он получает в виде:

В схеме испытаний Бернулли

$$P\{-l\le\mu-np-z\le l\}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{0}^{\frac{l\sqrt{n}}{\sqrt{2xx'}}}e^{-t^2}dt+\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi xx'}}e^{-\frac{l^2n}{2xx'}},$$

где μ – количество появлений события в n испытаниях, p – вероятность появления события в единичном испытании, z – некоторое число, $|z|\le1$, $x=np+z$, $x'=nq-z$, $q=1-p$. Существенно, что Лаплас дает здесь оценку погрешности при замене вероятности интегралом. Лаплас приводит примеры применения этих предельных теорем.

Шире, чем у Д. Бернулли, Лаплас использует методы математического анализа в теории вероятностей. В частности, Лаплас это делает в восходящей к Д. Бернулли «урновой схеме». Имеется две урны, в каждой из которых –

шары белого и черного цвета, а всего в них n белых и n черных шаров. Шары циклически перекладываются по одному из урны в урну. Какова вероятность $z_{x,r}$ того, что в урне A после r циклов окажется x белых шаров? Для решения задачи Лаплас составляет уравнение в конечных частных разностях, от которого нестрого переходит к дифференциальному уравнению второго порядка в частных производных и решает его с помощью полиномов, которые теперь называют полиномами Чебышёва–Эрмита. Д. Бернулли и Лаплас отметили, что при любом распределении шаров в урнах вероятность вынуть шар определенного цвета выравнивается в результате многократного перекладывания шаров из урны в урну. Это пример испытаний, образующих марковскую цепь, а замечание о существовании предельных вероятностей предвосхищает эргодическую теорему А. А. Маркова (старшего, 1856–1922) о существовании предельной матрицы перехода в однородных цепях Маркова. Теория марковских цепей была построена А. А. Марковым в 1906–1912 гг. Начало теории случайных процессов принято связывать с урновой моделью Пауля и Татьяны Эренфестов (1907) теплового обмена между телами и диффузии газов. А именно: пусть k молекул распределены по двум резервуарам (телам), одна молекула случайно переходит из одного резервуара в другой и этот процесс повторяется. Каково распределение молекул после n шагов? То же спрашивается, если задана вероятность перехода молекул из одного резервуара в другой (см. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. – М.: Мир, 1967. – Т. 1. – С. 127, 371, 386). Отсюда видно, что историю случайных процессов следует начинать, по крайней мере, с Д. Бернулли, рассматривавшего «урновую схему» в работе «Аналитические исследования новой проблемы предположений» (1770).

В одной из своих задач Лаплас, обобщая схему Бернулли, близко подошел к распределению Пуассона $P(\xi = k) = \dfrac{a_n^k}{k!} e^{-a_n}$, где $a_n = np_n$; это

распределение имеет место, когда вероятности p_n различны и малы в разных сериях, состоящих из большого числа n опытов. В сходном виде это распределение получил Пуассон в 1837 г. Лаплас занимался также проблемами статистики народонаселения.

Во второй половине XVIII в. и первой половине XIX в. была создана теория ошибок измерений. Это сыграло большую роль в формировании понятия случайной величины. Но уже ранее потребности измерений в астрономии, а позже – в геодезии вызвали необходимость учитывать ошибки измерений. Еще Галилей подразделял ошибки наблюдений на случайные и систематические, последние вызваны несовершенством измерительных приборов. Коутс в статье «Оценки ошибок...», напечатанной в 1722 г., уже после его смерти, предлагал в качестве истинного значения измеряемой величины брать среднее арифметическое результатов измерения, а ошибкам приписывать некоторый «вес». В работе 1756 г. Т. Симпсон обсуждает вопрос о правомерности брать среднее арифметическое результатов измерения, а в следующем году рассматривает распределение ошибок, принимающих значения на $(-a,\ a)$ с плотностью распределения в виде треугольника с основанием $(-a,\ a)$ и вершиной в точке $\left(0,\ \frac{1}{a}\right)$. Первые принципы теории ошибок сформулировал Ламберт в 1760 и 1765 гг., ему принадлежит и термин «теория ошибок». Он дал правила оценок погрешностей и подбора эмпирических прямых и кривых, «сглаживающих» результаты наблюдений, при этом впервые использовал принцип максимального правдоподобия. Лагранж посвящает теории ошибок статью «О применении метода составления среднего из результатов большого числа наблюдений» (1775). Д. Бернулли в статье 1777 г. в качестве кривой плотности распределения случайных ошибок берет верхнюю полуокружность, для удобства вычислений заменяет ее параболой, составляет функцию правдоподобия и ищет ее параметр $\bar{x}$ из условия максимума, но это приводит к сложным вычисле-

ниям. Лаплас в своих ранних работах приходит к сложным неудовлетворительным выражениям для плотности распределения ошибок. Позже он предложил в качестве оценки неизвестного значения измеряемой величины брать значение $\hat{a}$, при котором сумма $\sum_{i=1}^{n} \left| x_i - \hat{a} \right|$ имеет минимум, но это приводило к сложным вычислениям.

Современную теорию ошибок создали независимо Гаусс, Лежандр и американский математик Ф. Эдрейн (1775–1843). Гаусс использовал метод наименьших квадратов с 1795 г., а обосновал его в «Теории движения небесных тел...» (1809). Лежандр первым опубликовал этот метод в специальном дополнении «О методе наименьших квадратов» в работе «Новый метод для определения орбит комет» (1806), но без достаточного обоснования. Эдрейн в 1808 г. и Гаусс в упомянутой выше работе 1809 г. показали, что при весьма широких условиях плотность распределения ошибок подчиняется нормальному закону $p(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$. Впрочем, статья Эдрейна осталась почти незамеченной, а результаты Гаусса и Лежандра сразу стали общеизвестными. Функцию $\frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 x^2}$ Гаусс назвал «функцией, поправляющей возможные ошибки». Распределение с такой плотностью в течение ста лет называли гауссовым, а Пуанкаре в 1912 г. назвал нормальным. Ему подчиняется, например, попадание снарядов при стрельбе. Бельгийский естествоиспытатель Л. А. Кетле (1796–1874), основоположник статистики, показал, что различные органы человека, животных и растений подчиняются нормальному распределению. В связи с этим другие распределения надолго были отодвинуты на задний план. Следует отметить, что до Гаусса нормальное распределение было известно Муавру, Лапласу и Д. Бернулли в связи с теоремой Муавра–Лапласа, но тогда оно еще не связывалось с теорией ошибок. Сущность метода Гаусса можно передать кратко следующим образом. По данным наблюдений (x_i, y_i) $(i = 1,\ 2,\ \dots,\ n)$ ищется эмпирическая кривая

$y = f(x, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, которая предполагается линейно зависящей от неопределенных параметров $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, подлежащих вычислению. Плотность распределения n независимых случайных отклонений $\varepsilon_i = y_i - f(x_i, \alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ равна $L = \prod_{i=1}^{n} \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2\varepsilon_i^2} = (\frac{h}{\sqrt{\pi}})^n e^{-h^2 \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2}$. Наиболее вероятными считаются ошибки, дающие максимум выражению L (принцип максимального правдоподобия), а это приводит к условию $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \min$, отсюда и название – метод наименьших квадратов. Дифференцирование суммы $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2$ по параметрам α_j при нахождении ее минимума дает линейную неоднородную систему для отыскания параметров α_j.

Большой заслугой Лапласа является получение им в 1809 г. центральной предельной теоремы для сумм n независимых случайных величин, он приводит ее и в «Аналитической теории вероятностей» (1812). Используя современные обозначения, можно полученную Лапласом теорему сформулировать так:

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ – последовательность независимых случайных величин, имеющих один и тот же закон распределения, $M\xi_k = a$, $D\xi_k = \sigma^2$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{ \alpha \le \frac{\sum_{k=1}^{n} \xi_k - na}{\sqrt{n}} \le \beta \right\} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\beta} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx,$$

т. е. распределение нормированной суммы $S_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ случайных величин стремится к нормальному при $n \to \infty$.

Лаплас говорит не о случайных величинах, а о случайных наблюдениях, понятие о дисперсии тогда не было введено. Само понятие случайной величины появилось в работе Пуассона в 1832 г. (пока еще без этого термина) и в лекциях Чебышёва в середине XIX в. Понятие плотности распределения вероятности широко использовалось Лапласом, Гауссом и Лежандром: это неотрицательная функция $p(x)$ такая, что $P(a \le \xi \le b) = \int\limits_a^b p(x)dx$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = 1$. Лаплас формулирует свою теорему для симметричного промежутка. В доказательстве он использует так называемый метод характеристических функций. Именно в случае, когда каждая из случайных величин ξ_k принимает значения $\xi = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$ с вероятностями $p_j = P\,(\xi_k = j)$, Лаплас вводит в рассмотрение $Me^{i\xi_k t} = \sum\limits_{j=-m}^{m} e^{ijt} p_j$, а в случае распределения случайной величины ξ с плотностью $p(x)$ будет $Me^{i\xi t} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} p(x)dx$ («преобразование Фурье» плотности $p(x)$). Название «характеристическая функция случайной величины» таким преобразованиям было дано позже. Следует отметить, что доказательство Лапласа этой теоремы, да и ряда других теорем, чисто формальное и даже небрежное. В строгости доказательств Лаплас уступает Гауссу, Лагранжу и Лежандру. Но огромная интуиция позволяет Лапласу получать правильные результаты. Теорема Муавра–Лапласа является частным случаем центральной предельной теоремы Лапласа. Дальнейшим обобщением этой теоремы Лапласа в XIX в. занимались Пуассон и особенно Чебышёв, а в XX в. – очень многие математики (Ляпунов, Марков, Линдеберг, Бернштейн, Хинчин, Леви, Феллер и др.).

В XVIII в. была построена в основных чертах общая теория уравнений в конечных разностях. Это уравнения вида

$$F\left(x,\ f(x),\ \Delta_h f(x),\ \Delta_h^2 f(x),\ \dots,\ \Delta_h^n f(x)\right)=0,$$

где $\Delta_h^k f(x)=\sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}\ C_k^s f(x+sh)$ (здесь $\Delta_h f(x)=f(x+h)-f(x)$,

$\Delta_h^2 f(x)=\Delta_h(\Delta_h f(x))=f(x+2h)-f(x+h)-(f(x+h)-f(x))=$

$=f(x+2h)-2f(x+h)+f(x)$ и т. д.).

Обратно, $f(x+kh)=\sum_{s=0}^{k}C_k^s\Delta_h^s f(x)$. Поэтому указанное выше уравнение можно записать в равносильной форме $\Phi(x,\ f(x),\ f(x+h),\ \dots,\ f(x+nh))=0$ Оно называется конечно-разностным уравнением порядка n, если содержит явно и $f(x)$, и $f(x+nh)$. Можно считать, что $h=1$. Обычно предполагается, что уравнение можно записать в виде $f(x+n)=\Phi_1(x,\ f(x),\ f(x+1),\ \dots,\ f(x+n-1))$, или, в иных обоз начениях, $y_{x+n}=\Phi_1\left(x,\ y_x,\ y_{x+1},\ \dots,\ y_{x+n-1}\right)$.

Если при $x=x_0$ заданы значения $f(x_0)=b_0$, $f(x_0+1)=b_1$, ..., $f(x_0+n-1)=b_{n-1}$, то по ним однозначно определяется $f(x_0+n)$, а замена x_0 на x_0+1 дает $f(x_0+n+1)$ и т. д., т. е. находятся все значения $f(x_0+m)$ для целых неотрицательных m. Если считать $b_k=C_k$, $k=0,\ 1,\ \dots,\ n-1$, произвольными постоянными, то получаем общее решение исходного уравнения в виде $f(x)=\Psi(x,\ C_0,\ C_1,\ \dots,\ C_{n-1})$ при $x=x_0+m$, где m – любое целое неотрицательное число. В 1750 г. Эйлер отметил, что при решении разностных уравнений с шагом h в общем случае вместо произвольных постоянных следует брать произвольные периодические функции с периодом h.

Первыми примерами конечно-разностных уравнений были рекуррентные соотношения для некоторых последовательностей, например, уравнение Фибоначчи (Леонардо Пизанского, XIII в.) $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ при

начальном условии $u_0 = u_1 = 1$. Разлагая рациональные функции в степенные ряды, т. е. $\frac{P(x)}{Q(x)} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...$, и используя для нахождения коэффициентов тождества $P(x) = Q(x)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + ...)$, Муавр (в случае простых корней многочлена $Q(x)$) и Эйлер (в общем случае) получили рекуррентные зависимости между коэффициентами и из них нашли общий вид коэффициентов a_k. Конечно-разностные уравнения возникали также при решении многих задач комбинаторики и теории вероятностей. Например, в задаче о разорении игрока предполагается, что игрок A в каждой очередной партии игры либо выигрывает 1 жетон с вероятностью p, либо проигрывает с вероятностью q. Пусть y_n – вероятность того, что игрок A, имея n жетонов, в конце концов разорится. Разорение игрока A, имеющего перед очередной партией игры n жетонов, произойдет в каждом из несовместных случаев: либо он выиграет очередную партию и разорится, имея $n+1$ жетон, либо проиграет ее и разорится с $n-1$ жетонами, т. е. $y_n = py_{n+1} + qy_{n-1}$.

Лагранж в работе 1759 г. решил линейное неоднородное разностное уравнение первого порядка $\Delta y + M(x)y = N(x)$, а также линейное неоднородное разностное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами $y + A\Delta y + B\Delta^2 y + ... + Q\Delta^n y = x$. В работе 1775 г. он решил линейное однородное разностное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами $Ay(x) + By(x+1) + ... + Ny(x+n) = 0$ с помощью подстановки $y = m^x$, которая приводит к алгебраическому уравнению $A + Bm + ... + Nm^n = 0$ для нахождения m. В той же работе Лагранж показал, что, зная общее решение линейного однородного разностного уравнения $Lf = f(x+n) + a_1(x)f(x+n-1) + ... + a_n(x)f(x) = 0$, можно методом вариации постоянных найти частное решение неоднородного уравнения $Lf = \varphi(x)$. Несколько ранее по-иному эту задачу решил Лаплас. Он же впервые указал, что можно,

не нарушая общности, принимать в конечно-разностных уравнениях постоянный шаг h за единицу.

В «Аналитической теории вероятностей» Лаплас решает ряд задач с помощью конечно-разностных уравнений от одной или большего числа переменных. Он приводит еще один способ решения линейных конечно-разностных уравнений с постоянными коэффициентами для функций, зависящих от одной или нескольких переменных. Там же он излагает предложенный им еще в 1782 г. метод решения уравнений с переменными коэффициентами вида $A(s)y(s)+B(s)\Delta y(s)+...+K(s)\Delta^m y(s)=0$, где $\Delta^j y(s)$ – разность j-го порядка в точке s с шагом 1, а $A(s)$, $B(s)$,... – многочлены от s. Решение он ищет в виде $y(s)=\int_a^b x^s\varphi(x)dx$ или $y(s)=\int_a^\infty e^{-xs}\varphi(x)dx$, подставляет в дифференциальное уравнение, которым заменяет конечно-разностное, и находит дифференциальное уравнение для определения функции $\varphi(x)$, которое затем решает. Заметим, что в настоящее время интегральное преобразование $\int_0^1 x^s\varphi(x)dx$ носит имя финского математика Р. Х. Меллина (1854–1933), который рассматривал его намного позже, а $\int_0^\infty e^{-xs}\varphi(x)dx$ называется преобразованием Лапласа функции $\varphi(x)$. Но Лаплас в этих интегральных преобразованиях выбирал пределы интегрирования a и b в ходе решения задачи из тех иных условий. Преобразование Лапласа еще до Лапласа использовал Эйлер для решения обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Указанное выше конечно-разностное уравнение Лаплас заменяет дифференциальным, исходя из того, что $y^{(j)}(s)\approx\frac{\Delta_h^j y(s)}{h^j}$, а при $h=1$ будет $\Delta^{(j)}y(s)\approx y^{(j)}(s)$. Схема решения соответствующего дифференциального уравнения Лапласом с помощью

преобразования $y(s)=\int_a^b x^s\varphi(x)dx$ приведена в [109, с. 280–281]. Лаплас использует аналогично и преобразование $\int_0^\infty e^{-xs}\varphi(x)dx$. Кроме того, он с помощью этого преобразования исследует асимптотическое поведение решения на бесконечности. В частности, он рассматривает конечно-разностное уравнение $y(s+1)-(s+1)y(s)=0$, решением которого является гамма-функция $y(s)=\Gamma(s+1)=\int_0^\infty x^s e^{-x}dx$, и находит ее асимптотику при $s\to+\infty$ в виде

$$y(s)=s^{s+\frac{1}{2}}e^{-s}\sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{12s}+...\right).$$

В настоящее время метод Лапласа получения асимптотики несобственных интегралов, зависящих от параметра, используется в обобщенном и уточненном виде. Сам Лаплас при нахождении асимптотики интегралов не пользовался формулой Тейлора, а действовал формально с рядами, а также интегралами, не затрагивая вопроса об их сходимости и, тем более, о законности почленного интегрирования ряда. Название «преобразование Лапласа» ввел А. Пуанкаре (1854–1912). Лаплас не ставил вопроса об обращении своих интегральных преобразований. Обращение преобразования Лапласа рассматривали французские математики Лакруа, Пуассон, Коши (1827) и английский математик Мерфи (1833).

Интересы Лапласа лежали в прикладных областях математики, связанных с применением математического анализа и дифференциальных уравнений, а также в астрономии. В отличие от многих своих знаменитых современников, он не занимался такими абстрактными науками, как геометрия, теория чисел и алгебра. И, тем не менее, в работе «Исследования по интегральному исчислению и о системе мира» (1772, опубликовано в 1776) он, по выражению Вилейтнера [69, с. 58], «случайно» рассматривает свойства

определителя системы линейных уравнений, называя его результантом, и приходит к носящей его имя теореме о представлении определителя в виде суммы произведений его миноров на соответствующие дополнения, хотя и не доказывает эту теорему в самом общем виде.

О Лапласе: [103; 1, т. 3, с. 146–151, 396–399, 440–449; 107, с. 185–196; 69, с. 208–209, 225–226, 403–404], а также [160–162; 214, с. 115–130; 74].

История понятия «определитель»

Это понятие возникло в конце XVII в. при решении систем линейных алгебраических уравнений. Японский математик **Кова Секи (1642–1708)** в рукописном труде 1683 г., рассматривая древнекитайский способ «фан-чен» решения системы линейных уравнений на счетной доске, изложенный в «Математике в 9 книгах» (II в. до н. э.), приходит к своеобразной теории определителей. Но в Европе о его исследовании не было известно до XIX в. Идея обозначения коэффициентов произвольной системы линейных уравнений парами числовых индексов впервые была высказана Лейбницем в письме к Лопиталю в 1693 г., здесь же содержится и зародыш понятия определителя. Лейбниц говорит об удобстве таких обозначений и в качестве примера приводит общую систему трех линейных уравнений, записывая ее в виде

$$\begin{cases} 1_0 + 1_1 x + 1_2 y = 0, \\ 2_0 + 2_1 x + 2_2 y = 0, \\ 3_0 + 3_1 x + 3_2 y = 0, \end{cases}$$

что в нашей записи означает

$$\begin{cases} a_{10} + b_{11} x + c_{12} y = 0, \\ a_{20} + b_{21} x + c_{22} y = 0, \\ a_{30} + b_{31} x + c_{32} y = 0. \end{cases}$$

Результат исключения x и y из этой системы (т. е. условие того, что три прямые на плоскости пересекаются в одной точке) Лейбниц записывает в виде

$$\begin{matrix} 1_0 \cdot 2_1 \cdot 3_2 & & 1_0 \cdot 2_2 \cdot 3_1 \\ 1_1 \cdot 2_2 \cdot 3_0 & = & 1_1 \cdot 2_0 \cdot 3_2 , \\ 1_2 \cdot 2_0 \cdot 3_1 & & 1_2 \cdot 2_1 \cdot 3_0 \end{matrix}$$

что соответствует нашей записи

$$a_{10}a_{21}a_{32} + a_{11}a_{22}a_{30} + a_{12}a_{20}a_{31} = a_{10}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{20}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{30},$$

т. е. $\begin{vmatrix} a_{10} & a_{11} & a_{12} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$. В одной работе, опубликованной в 1700 г., Лейбниц применяет свой метод обозначения коэффициентов индексами в случае рядов. Переписка Лейбница с Лопиталем была опубликована лишь в 1850 г.

Профессор университета в Женеве **Габриель Крамер (1704–1752)**, ученик и друг Иоганна Бернулли, в своей книге «Ведение в анализ алгебраических кривых» (1750) привел, в частности, носящий его имя способ решения системы любого числа линейных уравнений с таким же числом неизвестных x, y, z, ... Произвольные коэффициенты при этих неизвестных он обозначает теми же, но прописными буквами, снабжая их верхним индексом, показывающим номер уравнения, а правые части (он ставит их слева) записывает в виде A^1, A^2, A^3, ... Специального термина для определителя системы Крамер не вводит, а говорит о сумме произведений вида $\pm X^i Y^j Z^k$ ..., где индексы в случае n уравнений представляют собой всевозможные $n!$ перестановок чисел 1, 2, ... , n. Для определения знака указанных произведений Крамер вводит понятие «беспорядка», что соответствует нашему термину «инверсия». В результате решения системы n уравнений с n неизвестными Крамер приходит к своему правилу: неизвестные выражаются в виде отношений, где знаменателем является то, что мы называем определителем системы, а числитель образуется из знаменателя путём замены коэффициентов при соответствующем неизвестном свободными членами с теми же индексами. Заметим, что главным предметом

исследования в большой по объёму (около 700 с.) книги Крамера является исследование алгебраических кривых вида $F(x,y)=0$: получение с помощью многоугольника Ньютона разложений в окрестностях особых точек различных ветвей кривых по дробным степеням переменной (эти исследования были продолжены и обобщены в 1840 г. французским математиком В. Пюизё), классификация алгебраических кривых до 5-го порядка включительно, а также подробный разбор кратных точек многих кривых до 8-го порядка включительно.

Французский математик **Этьен Безу (1730–1783)** родился в г. Немуре, преподавал математику в училище гардемаринов, а затем в Королевском артиллерийском корпусе. Большой популярностью пользовался его 6-томный «Курс математики для гардемаринов» (1764–1769) вплоть до последнего издания в 1848 г., несмотря на то, что изложение в нем было недостаточно последовательным. Этот курс был переведен и на русский язык в 1794 г. Здесь Безу, в частности, развил теорию исключения неизвестной из системы алгебраических уравнений вида $\begin{cases} f_1(x)=0, \\ f_2(x)=0, \end{cases}$ т. е. получение результанта системы в виде некоторого определителя, чем способствовал развитию теории определителей. В 1764 г. он получил результант при исключении одной из переменных в системе алгебраических уравнений $\begin{cases} f_1(x,y)=0, \\ f_2(x,y)=0 \end{cases}$ степеней, соответственно, m и n и показал, что степень результанта не превосходит mn. Тем самым, он впервые доказал теорему, сформулированную Маклореном, о том, что кривые порядков m и n пересекаются не более, чем в mn точках. В 1779 г. он обобщил теорему на случай нескольких уравнений. В случае системы n линейных управлений с $n-1$ неизвестными Безу формулирует рекуррентное правило образования результанта, т. е. определителя, равенство нулю которого обеспечивает совместность указанной системы уравнений. В этой же работе содержится и теорема, которая носит имя Безу:

остаток от деления многочлена $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ на двучлен $x - a$ равен $f(a)$.

Французский математик **Александр Теофил Вандермонд (1735–1796)** родился в Париже, преподавал в Высшей нормальной школе, с 1792 г. – директор музея искусств и ремесел. Он дружил с Г. Монжем и был активным участником Великой французской революции, сторонником якобинцев. Выше в очерке о Лагранже уже упоминалось о вкладе Вандермонда в теорию решений уравнений в радикалах. В «Мемуаре об исключении» (1772, опубл. в 1776) он ввёл, подобно Лейбницу, обозначения коэффициентов линейных уравнений парами индексов, записывая, например, $\frac{1}{2}$ вместо нашего a_{12}. Линейные неоднородные системы уравнений Вандермонд решает с помощью определителей, для которых он ввёл специальные обозначения. Определитель 2-го порядка он записывал в виде $\dfrac{\alpha|\beta}{a|b} = \dfrac{\alpha}{a}\cdot\dfrac{\beta}{b} - \dfrac{\alpha}{b}\cdot\dfrac{\beta}{a}$ (т. е. $\begin{vmatrix} u_{\alpha a} & u_{\alpha b} \\ u_{\beta a} & u_{\beta b} \end{vmatrix} = u_{\alpha a}u_{\beta b} - u_{\alpha b}u_{\beta a}$), здесь греческими буквами обозначены номера строк, латинскими – столбцов. Определитель 3-го порядка он вводит рекуррентно:

$$\frac{\alpha|\beta|\gamma}{a|b|c} = \frac{\alpha}{a}\cdot\frac{\beta|\gamma}{b|c} + \frac{\alpha}{b}\cdot\frac{\beta|\gamma}{c|a} + \frac{\alpha}{c}\cdot\frac{\beta|\gamma}{a|b},$$

т. е., как мы говорим, разлагает определитель по элементам первой строки. Аналогично вводятся и определители высших порядков. Вандермонд формулирует ряд основных свойств определителей: о сохранении знака определителя при замене всех его строк соответствующими столбцами (т. е. при транспонировании), об изменении знака определителя при перестановке двух строк и аналогично столбцов, о равенстве нулю определителя с двумя одинаковыми строками (столбцами). Имя Вандермонда

носит известный определитель, который он, впрочем, рассматривал лишь для $n = 3$, а в общем случае – Коши в 1815 г.

Выше уже упоминалось о том, что Лаплас в 1772 г. получил свою теорему о представлении определителя в виде суммы произведений его миноров на соответствующие дополнения. Лагранж дал разложение определителя по элементам какой-либо строки или столбца (т. е. доказал теорему Лапласа в частном случае) и, кроме того, доказал, что сумма произведений элементов строки на алгебраические дополнения соответственных элементов другой строки равна нулю, то же и для столбцов. Первую полную теорию определителей дали французские математики Коши и Бине в 1812 г. Коши использует для элементов определителя обозначение a_k^i, где i – номер строки, k – номер столбца.

Монж

Выдающийся французский математик и общественный деятель **Гаспар Монж (1746–1818)** родился в г. Боне в семье мелкого торговца. Высшее образование Монж получил в военно-инженерной школе в г. Мезьере (недалеко от границы с Бельгией) и в 1765–1783 гг. преподавал в ней математику и физику. В 1777 г. Монж женился, у него было три дочери. В Мезьере он, наряду с математикой, занимается физикой и химией, оборудует химическую лабораторию. Здесь он впервые, до Лавуазье, показывает, что вода состоит из водорода и кислорода. В 70-е гг. XVIII в. у Монжа сложились идеи начертательной геометрии, он опубликовал 5 мемуаров по дифференциальным уравнениям в частных производных, два мемуара по уравнениям в конечных разностях и мемуар по дифференциальной геометрии. В 1780 г. Монжа избирают адъюнктом по геометрии в Парижскую академию наук. С 1784 г. Монж проживает в Париже. В 1788 г. выходит его «Трактат по элементарной статике».

Будучи выходцем из третьего сословия, Монж восторженно приветствовал французскую революцию и с 1789 г. принимал в ней активное участие. В 1792–1793 гг. он был в течение 10 месяцев морским министром, затем

организовал производство пороха и литье пушек для нужд обороны. Кроме того, он принимает участие в Комиссии мер и весов, проявляет большую активность по созданию в 1794 г. Центральной школы общественных работ, переименованной в следующем году в Политехническую. Меньше Монж занимался созданием Нормальной школы, в которой он впервые прочел курс начертательной геометрии. Еще раз Монж прочел этот курс в Политехнической школе, а затем читал в ней курс приложений анализа к геометрии. Его лекции по этим курсам впервые были опубликованы отдельными выпусками в 1794–1795 гг.

В 1796–1797 гг. Монж в составе группы ученых и художников сопровождает Наполеона в итальянской кампании. Эта группа занималась отбором и реквизицией многих ценных произведений искусства из итальянских музеев. В 1798–1799 гг. снова в составе группы ученых Монж сопровождает Наполеона в египетском походе. Из математиков в эту группу входил также Фурье. В Египте Монж был главным организатором Каирского института. За короткое время члены этого института собрали огромный материал о достопримечательностях Египта. Поход окончился неудачно, Наполеон был вынужден, оставив свою армию, тайно отплыть, прихватив несколько человек из своей свиты, включая Монжа, как одного из наиболее близких друзей. В 1799 г. опубликована «Начертательная геометрия» Монжа, а в 1807 г. – его книга «Приложение анализа к геометрии». Наполеон наградил Монжа орденом Почетного легиона и присвоил ему титул графа и звание сенатора. В период 100 дней в 1814 г. Монж снова поддержал Наполеона. После этого король исключил Монжа из Института Франции (т. е. Академии наук) и из числа преподавателей Политехнической школы, руководителем которой Монж был на протяжении 20 лет. На место Монжа в Институт был принят О. Л. Коши (1789–1857), сторонник монархии Бурбонов.

К заслугам Монжа принадлежат: создание и геометрическая интерпретация теории дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (а отчасти и высших) в связи с дифференциальной геометрией; детальная разработка и систематизация начертательной геометрии как

отдельной науки; решение ряда новых задач аналитической геометрии и ее систематическое изложение. В течение последнего двадцатилетия XVIII в. и почти столько же в начале XIX в. Монж был крупнейшим специалистом в области геометрии. Свои результаты, опубликованные в ряде мемуаров в 70–80-х гг. XVIII в., он подытожил и развил в ряде трудов, материалом для которых служили также его лекции в Политехнической и Нормальной школах. Прежде всего, это «Листы анализа, приложенного к геометрии» по курсу лекций, читанного Монжем в Политехнической школе, выходившие по частям в виде отдельных выпусков в 1794–1795 гг., а затем развитые и объединенные в главной книге Монжа «Приложение анализа к геометрии» (издана в 1807, 1809 и 1850 гг.).

Уже в одной работе 1784 г. Монж дает ясную геометрическую трактовку дифференциальных уравнений вида $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ с коэффициентами, зависящими от $x,\ y,\ z$. Говорят, что это уравнение вполне интегрируемо, или интегрируемо одним соотношением, если его общий интеграл имеет вид $f(x,\ y,\ z) = C$, где C – произвольная постоянная (см., например, [155, гл. IX, § 2]). Монж показал, что в этом случае поверхности семейства $f(x,\ y,\ z) = C$ ортогональны кривым, определяемым системой уравнений $\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R}$. Эйлер и другие математики до Монжа считали абсурдными уравнения вида $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, не интегрируемые одним соотношением. Монж показал, что и в этом случае при задании дополнительного соотношения $\varphi(x,\ y,\ z) = 0$ исходное дифференциальное уравнение сводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с двумя искомыми функциями, которое определяет однопараметрическое семейство кривых, лежащих на поверхности $\varphi(x,\ y,\ z) = 0$. Общий метод интегрирования уравнений вида $\sum_{i=1}^{n} A_i(x_1,...,x_n)dx_i = 0$ в 1815 г. дал немецкий математик

И. Ф. Пфафф (1765–1825), в том же году его очень ясно изложил Гаусс, а в 1827 г. некоторые пробелы в рассуждениях Пфаффа устранил Якоби, не зная, по-видимому, об изложении Гаусса (см. [109, с. 101–104]). В дальнейшем теорию уравнений Пфаффа развивали многие математики.

Уже в 1771 г. Монж в письме к Кондорсе указал для каждого из следующих классов поверхностей: цилиндрических, поверхностей вращения и конических – соответствующее дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка. Он пришел к этим уравнениям из геометрических соображений. Например, дифференциальное уравнение $a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1$ цилиндрических поверхностей с образующими, параллельными прямой $x=az$, $y=bz$, выражает условие того, что эти образующие параллельны касательной плоскости $z-z_0=\frac{\partial z}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial z}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$ к поверхности $z=z(x,y)$. Решая дифференциальное уравнение, Монж находит общий вид цилиндрических поверхностей: $y-bz=\varphi(x-az)$, где φ – произвольная функция. Таким же способом Монж получает дифференциальные уравнения и для других классов поверхностей, в частности линейчатых поверхностей, т. е. образованных движением прямой.

В «Приложении анализа к геометрии» Монж приводит геометрическую трактовку дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка вида $F(x,y,z,p,q)=0$, где он использует обозначения $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Полный интеграл $f(x,\ y,\ z,\ a,\ b)=0$ такого уравнения представляет собой двупараметрическое семейство поверхностей. Содержащиеся в нем поверхности при $b=\varphi(a)$, где $\varphi(a)$ – произвольная функция, т. е. поверхности $f(x,\ y,\ z,\ a,\ \varphi(a))=0$, Монж назвал огибаемыми; этих

поверхностей бесконечно много. Огибающую их поверхность $\Phi(x, y, z)=0$ (общий интеграл) Монж находит, исключая параметр a из системы

$$f(x, y, z, a, \varphi(a))=0, \quad \frac{\partial f}{\partial a}+\frac{\partial f}{\partial b}\varphi'(a)=0.$$

Кривые, удовлетворяющие этой системе и зависящие от параметра a, Монж назвал «характеристиками», т. к. они лучше всего характеризуют интегральную поверхность $\Phi(x, y, z)=0$, образуя ее при изменении параметра a. Огибаемая и огибающая поверхности здесь касаются вдоль соответствующей характеристики. Монж рассматривает и возможное ребро возврата, состоящее из точек возврата характеристик, и соответствующую систему для его нахождения. В современных учебниках метод характеристик для решения дифференциальных уравнений первого порядка $F(x, y, z, p, q)=0$ носит имя Коши, развившего метод Монжа (см., например, [155, гл. 9, § 5]). По методу Коши получаются те же уравнения характеристик, что и по методу Лагранжа–Шарпи. Монж распространил свой метод на линейные уравнения 2-го порядка вида $Ar+Bs+Ct+D=0$, где A, B, C, D – функции от x, y, z, а $r=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $s=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $t=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ (сокращенные обозначения вторых производных буквами r, s, t принадлежат Монжу). Своим методом Монж решил и некоторые виды нелинейных уравнений 2-го и 3-го порядков.

Для развития дифференциальной геометрии большое значение имели детальные исследования Монжем линейчатых поверхностей и особенно их частного случая – развертывающихся поверхностей, изложенные им в мемуарах, лекциях в Политехнической школе и «Приложении анализа к геометрии». Линейчатые поверхности образуются совокупностью прямых, зависящих от одного параметра. Такие поверхности можно описать движением прямой (образующей) по заданной линии (направляющей). Развертывающиеся поверхности, кроме того, посредством изгибания можно наложить

(«развернуть») на плоскость. Развертывающаяся поверхность является либо цилиндром, либо конусом, либо образована касательными к некоторой пространственной кривой *L* (рис. 29). Эту кривую *L* называют ребром возврата развертывающейся поверхности. Сечение развертывающейся поверхности нормальной плоскостью к кривой *L* в точке *M* (эта плоскость перпендикулярна касательной к *L* в точке *M*) представляет собой кривую, для которой *M* является точкой возврата. При наложении на плоскость кривая *L* переходит в плоскую кривую, а обе части развертывающейся поверхности, содержащие *L*, «слипаются». Развертывающиеся поверхности начал изучать Эйлер, но Монж продвинулся дальше, найдя их дифференциальное уравнение $rs - t^2 = 0$, а также более сложное дифференциальное уравнение произвольной линейчатой поверхности.

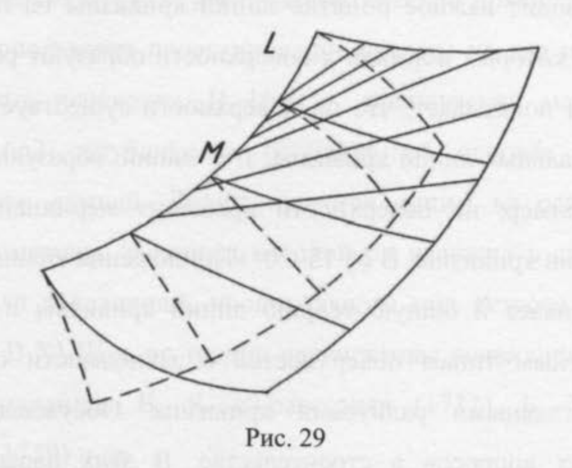


Рис. 29

Аналитическую геометрию пространственных кривых начал строить Клеро. Монж положил начало дифференциальной геометрии пространственных кривых. Он вводит оси кривизны кривой, называя их линиями полюсов. Ось кривизны – это прямая, проходящая через центр кривизны кривой (центр соприкасающейся окружности) перпендикулярно соприкасающемуся кругу кривой (соприкасающейся плоскости кривой). Монж показывает, что оси кривизны данной кривой образуют развертывающуюся поверхность (он называет ее поверхностью полюсов). Лежащая на поверхности полюсов линия центров

кривизны кривой при развертывании поверхности полюсов на плоскость переходит в прямую, т. е. является геодезической линией на поверхности полюсов. Монж выводит и дифференциальное уравнение геодезических линий, которое, как он сам отмечает, получилось таким же, как и у И. Бернулли. Монж впервые рассмотрел еще одну развертывающуюся поверхность, связанную с кривой, а именно спрямляющую поверхность, т. е. огибающую спрямляющих плоскостей кривой. Данная кривая на своей спрямляющей поверхности является геодезической, следовательно, переходит в прямую при развертывании спрямляющей поверхности на плоскость. Этим объясняется присутствие здесь слова «спрямляющая». Монж рассматривает также развертывающиеся поверхности, охватывающие два заданных тела, и говорит о тенях и полутенях, возникающих, когда одна из этих поверхностей, светящаяся, освещает другую, темную.

Монж вводит важное понятие линий кривизны на поверхности как линий, в точках которых нормали к поверхности образуют развертывающую поверхность. Он показывает, что на поверхности существует два семейства взаимно ортогональных линий кривизны, т. е. линий, образующих ортогональную сеть. Например, на поверхности вращения меридианы и параллели являются линиями кривизны. В §§ 15–20 «Приложения анализа к геометрии» Монж рассматривает и общую теорию линий кривизны и ее применение к более конкретным типам поверхностей в зависимости от соотношения между двумя главными радиусами кривизны. Обсуждаются некоторые применения этих вопросов в строительстве. В этих параграфах рассматриваются классы поверхностей, которые можно задать дифференциальными уравнениями в частных производных 2-го порядка. Далее Монж рассматривает некоторые поверхности, задаваемые уравнениями в частных производных 3-го порядка. В нескольких дальнейших параграфах рассматриваются, главным образом, поверхности, все нормали к которым касаются какой-либо другой поверхности. Последний в книге § 27 посвящен эволютам, радиусам кривизны и точкам перегиба пространственных кривых. В предыдущих параграфах Монж касался этих вопросов для некоторых частных случаев простран-

ственных кривых. Теперь он ставит и решает задачу: показать, что любая кривая (и плоская, и пространственная) имеет в пространстве бесконечно много эволют, а также найти уравнения эволют по заданным уравнениям эвольвент. К трактату приложены два мемуара. В первом излагается рассмотренный выше метод характеристик Монжа интегрирования уравнений первого порядка в частных производных, а второй посвящен рассмотрению решения уравнения колебаний струны.

Монж разработал и впервые систематически изложил начертательную геометрию в своих курсах лекций и трактате «Начертательная геометрия», выдержавшем с 1799 г. по 1847 г. семь изданий. Отдельные элементы начертательной геометрии имелись уже у архитекторов и художников эпохи Возрождения. Немецкий художник А. Дюрер в «Наставлении к измерению циркулем и линейкой» (1525) ввел математические правила перспективных построений и использовал проектирование фигуры на две или три взаимно перпендикулярные плоскости. В 1640 г. французский математик Жирар Дезарг (1591–1662) опубликовал брошюру об основах архитектурного черчения и резки камней. Дезарг является одним из основоположников проективной геометрии, элементы которой он изложил в своем «Черновом наброске подхода к явлениям, происходящим при встрече конуса с плоскостью» (1639). В XVIII в. по теории перспективы появились работы многих математиков: голландца В. Я. с'Гравесанда (1711), Б. Тейлора (1715), И. Г. Ламберта (1759) и др.

У Монжа начертательная геометрия принимает вид, близкий к современному. Монж проектирует фигуры, находящиеся в пространстве, на две плоскости, пресекающиеся под прямым углом. Затем эти полуплоскости разворачиваются так, что вместе образуют одну плоскость. Получившиеся две проекции фигуры на эту плоскость позволяют решать пространственные задачи. Таким способом Монж строит касательные плоскости к поверхностям (в частности, к сфере), проведенные через точки, не лежащие на поверхностях, изображает линии пересечения поверхностей и касательные к этим

линиям, строит эволюты и эвольвенты в случае пространственных кривых на поверхностях. В «Начертательной геометрии» Монж геометрически доказывает теоремы о свойствах кривизны поверхности, рассматривает линии кривизны на поверхности и соответствующие этим линиям развертывающиеся поверхности.

Лекции Монжа по аналитической геометрии, прочитанные в Политехнической школе, послужили основой для учебника «Приложение алгебры к геометрии» (1805). Монж написал его в соавторстве со своим учеником Ашеттом. Отметим некоторые особенности изложения здесь аналитической геометрии. Оно начинается сразу с геометрии в пространстве, а плоская геометрия получается как частный случай. Рассматривается преобразование системы координат. Геометрически вводится понятие центра и диаметральной плоскости поверхности. Подробно исследуются поверхности 2-го порядка. В частности, показывается, что, за исключением параболического и гиперболического цилиндров и гиперболического параболоида, через каждую точку поверхности 2-го порядка можно провести две окружности, полностью лежащие на поверхности. Заметим, что уже Архимед рассматривал тела вращения: «сфероид» (эллипсоид) и «коноиды» (параболоид и двуполостный гиперболоид).

Ферма говорит уже и о соответствующих поверхностях, а также замечает о существовании параболических и гиперболических цилиндров. Однополостный гиперболоид рассматривали Кавальери и Валлис, а гиперболический параболоид открыл Эйлер, впервые давший классификацию поверхностей 2-го порядка в «Приложении о поверхностях» (1748). Терминология Эйлера в этом вопросе отличается от современной. Например, однополостный гиперболоид он называет «эллиптико-гиперболическая поверхность», а двуполостный гиперболоид – «гиперболико-гиперболическая поверхность» и т. п. Современные названия поверхностей второго порядка принадлежат Монжу. В книге Монжа и Ашетта описывается и образование поверхностей 2-го порядка с помощью движения круга переменного радиуса, а также движением одного конического

сечения по другому. Кроме того, линейчатые поверхности – однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид – описываются там также движением образующей их прямой. И в начертательной, и в аналитической геометрии Монжа характерно стремление обойтись минимальным количеством рисунков, чтобы достичь большей аналитичности изложения. Отметим еще, что в своих лекциях и трудах Монж уделял внимание практическим приложениям геометрии. Он занимался также вопросами статики и теории механизмов и машин. Монж был замечательным педагогом. Из числа слушателей его лекций вышло много выдающихся математиков: Мёнье (1754–1793), Л. Карно (1753–1823), Фурье (1768–1830), Дюпен (1784–1873), Понселе (1788–1867), Коши (1789–1857). О Монже: [104; 1, т. 3, с. 184–195, 437–439; 69, с. 202–205, 210–211, 317–318, 323–326, 338], а также в книге: Демьянов В.П. Геометрия и Марсельеза. – М.: Знание, 1979. – 204 с.

Вопросы обоснования математического анализа в конце XVIII века

Было бы ошибочным считать, что XVII и XVIII вв. – это период лишь формального, некритического развития математического анализа. Уже тогда многие видели недостатки нового исчисления и стремились устранить их под воздействием резкой критики. Вопросам обоснования математического анализа или попыткам более строгого его изложения уделяли внимание Ньютон, Лейбниц, Робинс, Маклорен, Д'Аламбер, Эйлер, Лагранж, а в конце XVIII в. – Люилье, Л. Карно и Гурьев. Иное дело, что им не удавалось внести полную ясность в этот вопрос. Теория пределов, вопросы сходимости рядов и интегралов только еще развивались, понятие непрерывности отсутствовало. То, что казалось строгим математикам XVII и XVIII вв., во многом представляется нестрогим с точки зрения развитого классического анализа. Впрочем, после создания в 60-х гг. XX в. неархимедова анализа некоторые из считавшихся нестрогими концепций и методов математического анализа XVII–XVIII вв. получили реабилитацию. В XX в. представители различных направлений в математике по-

разному оценивают строгость и в развитом классическом анализе, созданном к началу XX в. По поводу строгости в математике выдающийся немецкий математик Ф. Клейн (1849–1925) писал: «Рассматривая историю нашей науки, мы видим, что «строгость» при всем нашем отношении к ней представляет собой нечто относительное – требование, развивающееся постепенно, в процессе общего поступательного движения науки. Интересно наблюдать, как в периоды общей устремленности к строгости современники всякий раз уверены, что ими в этом направлении достигнут максимум возможного, и как потом одно из следующих поколений оставляет их в своих требованиях и достижениях далеко позади» [140, с. 67].

Люилье

В 1876 г. Берлинская АН по инициативе Лагранжа объявила конкурс о точной теории того, что в математике называют бесконечно малым и бесконечно большим. Указывалось, что древние математики «тщательно избегали всего, что касается бесконечного, и великие современные аналисты признают, что выражение **бесконечная величина** противоречиво. Академия поэтому желает получить объяснения того, как из противоречивого допущения было выведено столько истинных теорем и чтобы был указан верный, ясный, словом, подлинно математический принцип, который мог бы заменить **бесконечное**, не делая слишком трудными или слишком долгими производимые с помощью этого средства исследования» [1, т. 3, с. 275]. Из 21 работ, присланных на конкурс, ни одна полностью не удовлетворила академиков, а фактически Лагранжа. И все же одна из работ, присланная под девизом «Бесконечность есть бездна, поглощающая наши мысли» и более других отвечающая поставленным требованиям, была премирована. Ее написал швейцарский математик **Симон Люилье (1750–1840)**, работавший в Женевском университете, а некоторое время – в Польше. Работа Люилье под названием «Элементарное изложение начал высших исчислений» была опубликована в 1786 г. Люилье обосновывает анализ с помощью понятия предела, предполагая,

по его словам, «развитие мыслей …, которые г. Д'Аламбер лишь наметил». Люилье почти повторяет определение предела, данное Д'Аламбером, уточняя, что предел есть постоянная величина, поэтому определение предела у Люилье здесь, по существу, такое же, как и у Робинса. Речь идет об односторонних пределах монотонных переменных, не достигающих своего предела. Как и Робинс, Люилье по отдельности определяет предел величины и предел отношения. К теоремам о единственности предела и о пределе произведения Люилье добавляет теорему о пределе частного. Термином «бесконечно малая» он не пользуется, оставляя его для актуальных бесконечно малых, которых избегает, а переменную, стремящуюся к нулю, называет длинно: «переменное количество, не имеющее предела малости (или такое, которое может быть сделано меньшим, чем любое указанное количество)» [1, т. 3, с. 275], т. е. рассматривает как потенциально бесконечно малую. Название «переменное количество, не имеющее предела малости» неудачно для переменной, стремящейся к нулю. Он выводит также теорему, как мы говорим, о сумме бесконечно малых, утверждая, что сумма любого конечного количества слагаемых вида Ax^a $(a > 0)$ может быть сделана меньше какой бы то ни было указанной величины, если *x* «не имеет предела малости». Люилье использует для обозначения предела сокращенный знак $\lim$. Производную функции P он называет «дифференциальным отношением» и обозначает $\lim\frac{\Delta P}{\Delta x}$ или $\frac{dP}{dx}$, рассматривая последнюю запись как единое целое, а не как отношение дифференциалов. Понятия дифференциала он не вводит. В дальнейших главах Люилье излагает дифференциальное и интегральное исчисление, включая теорию рядов. В одной из глав он критикует концепцию актуально инфинитезимальных величин, которую ранее пропагандировал непременный секретарь Парижской АН Б. де Фонтенель (1657–1757) в книге «Геометрия бесконечного» (1727).

В 1795 г. вышло латинское издание книги Люилье, переработанное и дополненное. Здесь он уже отказывается от требования монотонности

переменной в определении предела: «Если переменное отношение может становиться то больше, то меньше данного отношения, но изменяется так, что может подойти к данному отношению ближе, чем к нему подходит любое другое предложенное отношение, большее или меньшее, чем первое данное отношение, то данное отношение называется пределом переменного отношения. Здесь мы имеем дело с пределом как возрастающего, так и убывающего отношения. То же самое может иметь место для пределов переменных величин» [130, с. 52]. В качестве примера Люилье указывает, что частичные суммы ряда $1 - p + p^2 - p^3 + \ldots$, $(0 < p < 1)$ попеременно больше и меньше своего предела $\dfrac{1}{1+p}$. Подробнее: Шатунова Е. С. Теория пределов Симона Люилье [21, 1966, вып. 17, с. 325–331]. Другие работы Люилье относятся к теории многогранников, рядов и к теории вероятностей. В частности, в работе 1812–1813 гг. он обобщил теорему Эйлера о многогранниках. Теорема Люилье утверждает: если многогранник имеет p сквозных отверстий и все его грани гомеоморфны кругу, то справедлива формула $B - P + \Gamma = 2 - 2p$, где B – число вершин, P – число ребер, Γ – число граней многогранника. Впрочем, понятие гомеоморфизма как взаимно однозначного и взаимно непрерывного соответствия в то время еще не было. Отметим, что число p называется родом многогранника, такие многогранники называются $(p+1)$-связными, они топологически эквивалентны сфере с p ручками. Но эти понятия возникли уже в XIX в. в связи с работами Римана.

Гурьев

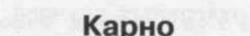
Из математиков в России конца XVIII в. и начала XIX в. наиболее значительным является математик-педагог **Семен Емельянович Гурьев (1764–1813)**. Он происходил из обедневшей дворянской семьи, окончил в 1784 г. инженерно-артиллерийское училище в Петербурге и затем преподавал в нем математику. В 1796 г. его избрали адъюнктом Петербургской АН.

В своей книге «Опыт о усовершенствовании элементарной геометрии» (1798) он оригинально излагает элементарную геометрию, перерабатывая Евклида, и, в частности, применяет метод пределов к некоторым вопросам геометрии. Определение предела у Гурьева почти такое же, как и во французской «Энциклопедии», но отмечается, что у Д'Аламбера пропущено указание на то, что предел есть постоянная величина. В одной статье Гурьева, написанной в 1797 г. и напечатанной в 1802 г., приведены без доказательств 12 «вспомогательных истин» о пределах (теоремы о пределах суммы, разности, произведения и др.) для монотонных величин. Там же Гурьев пишет: «Согласно 12 вспомогательным истинам метода пределов, видно, что если над какой-нибудь увеличивающейся или уменьшающейся величиной, имеющей предел, производят некоторую операцию, то результат этой операции имеет пределом результат той же операции, произведенной над пределом увеличивающейся или уменьшающейся величины» [1, т. 3, с. 276]. Это словесное выражение введенного позже Больцано (1817) и Коши (1821) свойства непрерывности функции в точке, а именно: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. Конечно, оно не следует из теорем Гурьева и никак не согласуется с тем, что в определении предела у Гурьева переменная не достигает своего предела. Но Гурьев формулирует это свойство как общее правило вычисления предела функции. В печати до Гурьева это свойство, по-видимому, никем не высказывалось, хотя им молчаливо пользовались.

В 1811 г. Гурьев публикует объемный курс в 502 с. под названием «Основания дифференциального исчисления с приложением к аналитике». Здесь Гурьев использует для обозначения предела букву П и доказывает ряд теорем о пределах. Но предположение о монотонности переменной вызывает необходимость рассмотрения отдельных случаев, когда переменные X и Y обе возрастают, или обе убывают, или изменяются в разных направлениях. Основным объектом дифференциального исчисления у Гурьева является производная, ее существование он усматривает в существовании касательной к кривой, а дифференциалы Гурьев вводит как произвольно малые числа,

отношение которых равно пределу частного $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, т. е. производной. Эти и другие книги Гурьева сыграли заметную роль в деле математического образования в России. О Гурьеве: [1, т. 3, с. 276–277; 130, с. 56; 196, с. 143–170; 120, т. 2, с. 12–15, 575].

Одним из учеников Гурьева был артиллерийский офицер, математик-любитель **П. А. Рахманов**, павший на поле боя под Лейпцигом в 1813 г. В своей работе 1803 г. он приводит доказательства 12 теорем Гурьева о пределах и делает попытку обоснования действий над иррациональными («неизвлекомыми») числами с помощью пределов приближений по недостатку и по избытку десятичными дробями, при этом существование иррациональных чисел принимается заранее. Эта попытка в то время не могла увенчаться успехом. Но любопытно, что в доказательствах теорем о пределах Рахманов пользуется буквой ε еще за 18 лет до Коши. Например, в доказательстве теоремы о пределе произведения Рахманов в предположении, что $0 < X < A$, $0 < Y < B$, из неравенств $A - X < \frac{\varepsilon}{2B}$, $B - Y < \frac{\varepsilon}{2A}$ получает $AB - BX < \frac{\varepsilon}{2}$ и $BX - XY < \frac{\varepsilon}{2}$, откуда $AB - XY < \varepsilon$. А. П. Юшкевич пишет, что это «пожалуй, первое известное мне в литературе употребление буквы ε для обозначения произвольно малого данного положительного числа. Впоследствии Рахманов опубликовал немало работ, главным образом популяризовавших новые идеи и результаты современных ему парижских математиков, с которыми он и лично познакомился во время одной поездки» [130, с. 57; 1, т. 3, с. 277].



Карно

Накануне реформы математического анализа значительную роль в его обосновании сыграл французский государственный деятель и математик **Лазар Никола Маргерит Карно (1753–1823)**. Он окончил в 1773 г. военно-

инженерную школу в Мезьере, где слушал лекции Монжа. В 1783 г. вышел трактат Карно по механике. В 1786 г. Карно присылает на конкурс Берлинской АН, о котором речь шла выше, свою работу по обоснованию математического анализа, которая позже послужила основой книги Карно «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых», изданной в 1796 г., а затем переиздававшейся три раза на французском языке вплоть до 1820 г. и выдержавшей несколько изданий на ряде европейских языков. На русском языке книга Карно впервые вышла в 1823 г., а затем в 1933 г. и в 1936 г. – со вступительной статьей А. П. Юшкевича «Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке» [102].

Л. Карно был одним из наиболее активных участников французской революции сначала в качестве члена Национального собрания, а затем Конвента и Комитета общественного спасения. Свой большой организаторский талант Карно проявил, возглавляя военный штаб в период обороны Франции от войск европейской коалиции государств 1793–1794 гг., за что получил прозвище «организатора побед». Накануне краха якобинского Конвента в 1794 г. Карно вышел из его состава. В новом правительстве (Директории) Карно продолжал руководить военным управлением. Но вспыхнувшая борьба в Директории и угроза ареста вынуждают Карно в 1797 г. бежать в Швейцарию. Карно исключили из Института (т. е. Академии наук). В 1799 г. Наполеон совершил государственный переворот. Он вернул Карно во Францию и на некоторое время назначил военным министром. Карно восстанавливают в Институте. Выходят три работы Карно по проективной геометрии. Наполеон производит его в сенаторы, графы и награждает орденом Почетного легиона, но лишает его этих почестей после того, как Карно открыто выступил в 1804 г. против провозглашения Наполеона императором. Оставшуюся часть жизни Карно провел в бедности. Но в критическое для Наполеона время в 1814 г. Карно предложил ему свою помощь и руководил обороной Антверпена. В период «ста дней» в 1815 г. он снова с Наполеоном, который назначил его министром внутренних дел. После поражения Наполеона под Ватерлоо Карно вынужден был эмигрировать и провести свои последние годы жизни в Варшаве и Магдебурге.

Король исключил его из членов Института. Отметим еще, что сын Лазара Карно, Никола Леонар Сади Карно (1796–1832), французский физик и инженер, является одним из создателей термодинамики.

Книга Л. Карно «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых», впервые изданная в 1796 г., как и оставшаяся неопубликованной работа, представленная в 1786 г. на конкурс Берлинской АН, имеет целью сравнить между собой известные методы построения математического анализа, выделить из них как наиболее предпочтительный, по мнению Карно, метод потенциально бесконечно малых и дать обоснование анализа бесконечно малых с помощью принципа компенсации ошибок. Впервые идею о том, что точные результаты в анализе получаются якобы в результате компенсации ошибок, высказал епископ Беркли в своем знаменитом памфлете «Аналист» (1734), а в 1761 г. – Лагранж в одной из своих заметок.

В главе I книги Карно речь идет о некоторых общих принципах использования бесконечно малых – «величин, которые можно сделать сколь угодно малыми». На примере построения касательной и окружности $y^2 = 2ax - x^2$ Карно иллюстрирует принципы отбрасывания бесконечно малых. Возникающие в процессе решения задач уравнения, содержащие бесконечно малые, Карно называет несовершенными. Путем соответствующих преобразований таких уравнений и устранения бесконечно малых получаются точные результаты. Здесь же он излагает свой принцип компенсации ошибок (§§ 24–29, 34–36) в виде ряда теорем, выражающих условия равенства величин и пренебрежения соответствующими бесконечно малыми. Глава II посвящена изложению алгоритма исчисления бесконечно малых Лейбница на многочисленных примерах.

Представляет интерес глава III, в которой дается сравнительная характеристика других концепций анализа, которыми можно заменить анализ бесконечно малых Лейбница (метод исчерпывания древних, метод неделимых Кавальери, метод неопределенных коэффициентов Декарта, метод первых и последних отношений или метод пределов Ньютона, метод флюксий Ньютона,

метод исчезающих количеств или нулей Эйлера, метод производных Лагранжа). Карно приходит к выводу, что все эти методы «представляют все тот же метод исчерпывания древних, более или менее упрощенный, более или менее удачно приспособленный к нуждам исчисления и, наконец, приведенный к регулярному, упорядоченному алгоритму» (§ 159). Карно уделяет особое внимание методу пределов. Понятие предела у Карно уже весьма общее: «… предел количества есть не что иное, как граница, к которой это количество, по предположению, непрерывно приближается, пока не станет отличаться от него сколь угодно мало» (§ 168). Карно считает предел «количеством установленным» (фиксированным). Он дает четкое определение бесконечно малой через понятие предела: бесконечно малое количество есть «не что иное, как разность какого-нибудь количества и его предела, или, если угодно, количество, предел которого есть нуль» (§ 131). «Значит, если метод пределов является точным, в чем нет никаких сомнений, то нет никаких оснований, чтобы не был точным анализ бесконечно малых» (§ 169). Для сокращенного обозначения предела Карно использует букву L. В работе Карно, присланной на конкурс Берлинской АН, содержатся еще теоремы о пределе постоянной и теорема о пределе частного: $L\frac{X}{Y}=\frac{LX}{LY}$, а также определение производной, которую Карно называет «дифференциальным моментом» и обозначает $L\frac{dy}{dx}$ или Dy. Но он определял производную недостаточно четко и не включил ее определение в книгу. Во время Карно теория пределов была еще недостаточно разработана. По поводу метода пределов Карно пишет: «Если бы этот метод было всегда так же легко употреблять, как и обыкновенный анализ бесконечно малых, то он мог бы казаться предпочтительным, потому что тогда он обладал бы тем преимуществом, что приводил бы прямым и всегда ясным путем к тем же самым результатам» (§ 135). Теория Карно компенсации ошибок не была воспринята его современниками, она оказалась излишней после разработки теории

пределов, четких определений производных и дифференциалов. Уже Коши в своем «Алгебраическом анализе» (1821) кладет в основу математического анализа синтез пределов и бесконечно малых.

Книга Карно «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых» получила широкую известность и оказала влияние на осуществление реформы математического анализа. Она вышла через 100 лет после первого курса дифференциального исчисления и подвела итог различным методам построения и обоснования анализа в преддверии XIX в. А. П. Юшкевич пишет, что Карно оказался одним из «организаторов победы» не только революции, но и того научного переворота, который готовился в XVIII в., а совершен был в XIX в. [102, с. 73].

В § 162 книги «Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых» Карно пишет: «Начала обыкновенной алгебры гораздо менее ясны и менее хорошо обоснованы, чем анализ бесконечно малых в той части, которая отличает ее от алгебры; метафизика правила знаков при более глубоком изучении ее обнаруживает, пожалуй, большие трудности, чем метафизика бесконечно малых количеств, это правило никогда не было доказано удовлетворительным образом, и, по-видимому, оно даже не может быть доказано удовлетворительно, а между тем, оно служит основой всей алгебры». В конце книги Карно помещает обширное примечание к § 162, где он подвергает критике существующие к тому времени объяснения правила знаков при умножении чисел и дает свое истолкование природы отрицательных чисел. Рассмотрим вкратце состояние вопроса об отрицательных числах к тому времени.

В «Началах» Евклида натуральное число определяется как совокупность единиц. Сама единица рассматривалась в то время не как число, а как «причина» числа. Что же касается нуля, то он долгое время, даже в XVII–XVIII вв., многими рассматривался как знак для «ничто», а не как число. Об отрицательных числах у Диофанта, а также у математиков в Китае, Индии, мусульманских странах и в Западной Европе до XVII в. говорилось в первой части пособия. Отрицательные числа обычно интерпретировались как долг. М. Штифель в середине

XVI в., по-видимому, впервые рассматривал отрицательные числа как меньшие нуля. Но еще и в XVII–XVIII вв. многие считали нелепым утверждение, что отрицательные числа меньше нуля, поскольку «нечто» не может быть меньше, чем «ничто». В XVII в. были обнаружены парадоксы, связанные с отрицательными числами. Один из них (парадокс Арно) мы рассматривали выше в конце очерка о Д'Аламбере. Взгляд на нуль как на число завоевывает признание лишь с конца XVIII в.

Декарт называет отрицательные корни уравнений «ложными», но рассматривает их как действительные числа и интерпретирует положительные и отрицательные числа с помощью противоположно направленных отрезков. Ньютон определяет положительные числа как большие нуля, а отрицательные – как меньшие нуля, но не дает обоснования правила знаков при умножении чисел. Если соотношение $(-a)b = -ab$ при положительных a и b математики XVI–XVII вв. трактовали как «долг a, взятый b раз, дает долг ab», то соотношение $(-a)(-b) = ab$ не поддается такой трактовке. Четкого определения отрицательного числа в XVII–XVIII вв. не было, его заменяли правила действий над отрицательными числами без строгого обоснования. В XVIII в. была широко распространена следующая точка зрения на природу положительных и отрицательных чисел: это однородные «абсолютные» величины, противоположные друг другу, умаляющие друг друга при сложении. Маклорен, Клеро и Эйлер придерживались мнения, что положительные числа – это количества прибавляемые, с предшествующим знаком +, а отрицательные – вычитаемые, с предшествующим знаком –. Маклорен еще добавлял, что положительные и отрицательные числа противоположны друг другу. Эйлер, Клеро и Лаплас предпринимали попытки вывести правила знаков при умножении чисел.

Выше уже отмечалось, что Д'Аламбер рассматривал отрицательные числа как лишенные реального содержания удобные знаки фиктивных понятий. Указывая на трудности обоснования отрицательных чисел и правил действия над ними, Л. Карно в своей книге также выступает против того,

чтобы считать отрицательные числа реально существующими самостоятельными объектами: «Ни одно количество не является отрицательным по своей природе, а может быть им только по знаку, который ему временно предшествует в алгебраических выражениях. Знак плюс означает сложение, знак минус – вычитание и ничего более». Точка зрения Д'Аламбера и Карно на природу отрицательных чисел не получила поддержки, но их критические замечания по этому вопросу раскрывали действительно слабые стороны учения о числе в XVIII в. Заметим, что первые близкие к современным арифметические теории, включающие отрицательные числа, были разработаны только в XIX в. Гамильтоном и Грассманом. Подробнее о состояния учения о числе в XVIII в. и начале XIX в. см. в [106].

Карно впервые после Паппа, Дезарга и Паскаля внес существенный вклад в проективную геометрию в своих работах «О корреляции фигур в геометрии» (1801), «Геометрия положения» (1803) и «Опыт о трансверсалях» (1806). Карно называет «корреляцией» (буквально «соотношением») соответствие между двумя положениями фигуры, полученными одно из другого путем непрерывного преобразования (по терминологии Карно, преобразования «нечувствительными степенями»). Принцип корреляции играет у него роль принципа непрерывности. Карно различает корреляции: «прямую» (величины, характеризующие систему, при преобразовании не меняют знака), «косвенную» (некоторые из величин обращаются в нуль и меняют знак) и «комплексную» (некоторые из величин становятся мнимыми). Примером последней является «корреляция» между эллипсом $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (в частности, окружностью) и гиперболой $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

В «Геометрии положения» (перевод термина Лейбница *geometria situs*, ставшего позже названием топологии) Карно вводит ориентированную длину отрезков.

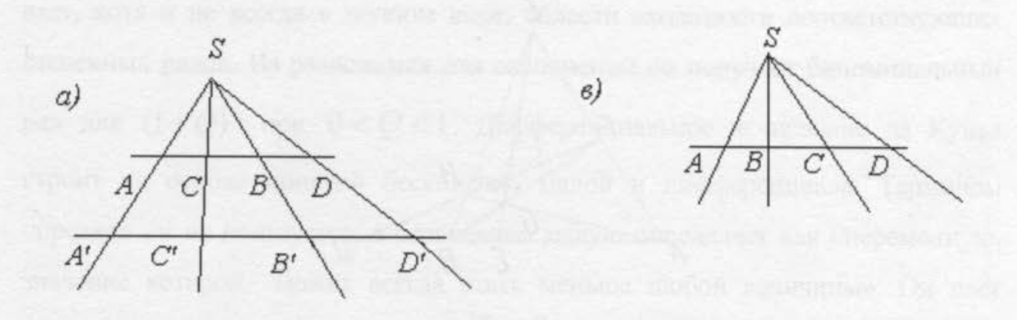


Рис. 30

Он рассматривает 4 точки на прямой, образующие две пары (A,B), (C,D), и двойное отношение $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}:\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{DB}}$, его кратко записывают в виде $(ABCD)$. Оно отрицательно, если пара (C,D) разделяет пару (A,B) (как на рис. 30, а)), и положительно, если пара (C,D) не разделяет (A,B) (как на рис. 30, б)). Карно показывает, что при проектировании точек A, B, C, D с помощью четырех прямых («трансверсалей») с общей точкой S на любую прямую $A'D'$ двойное отношение сохраняется, т. е. представляет проективный инвариант. Если $(ABCD)=-1$, то это отношение называется гармоническим, а о точках A, B, C, D говорят, что они образуют гармоническую четверку, а также что пара (C,D) гармонически сопряжена с парой (A,B). В «Опыте о трансверсалях» Карно, в частности, рассматривает полный четырехвершинник (рис. 31). Это плоская фигура, образованная четырьмя точками (вершинами) E, G, F, H, никакие три из которых не коллинеарны, т. е. не лежат на одной прямой, и шестью соединяющими их прямыми (сторонами). Пары сторон EF и GH, FG и EH, EG и FH, не имеющие общих вершин, называются противоположными. Точки A, B, I пересечений противоположных сторон называются диагональными, а прямые AB, BI и IA – диагоналями полного четырехвершинника.

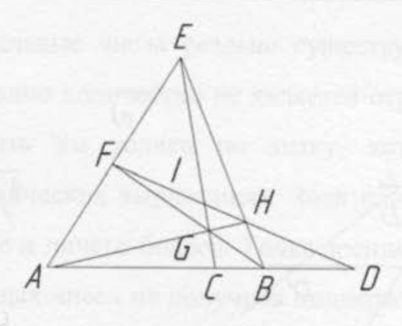


Рис. 31

Карно доказал важную теорему проективной геометрии: на каждой диагонали полного четырехвершинника пара диагональных точек гармонически сопряжена паре точек – пересечений этой диагонали сторонами четырехвершинника, проходящими через третью диагональную точку. На рис. 31 для полного четырехвершинника изображена диагональ AB, пары точек (A,B) и (C,D) являются гармонически сопряженными, т. е. $(ABCD)=-1$, другими словами, точки A, B, C, D образуют гармоническую четверку. Эту и другие теоремы о полном четырехвершиннике доказал уже древнегреческий математик Папп (III в.), но он рассматривал не направленные отрезки. Заслугой Карно является то, что он возродил интерес к проективной геометрии после длительного перерыва в полторы сотни лет (после Дезарга). О Карно: [102; 1, т. 3; 21, 1986, вып. 30].

Вопросам обоснования математического анализа уделял внимание португальский математик **Жосе Анастасио да Кунья (1744–1787)**, профессор математики в Коимбре. За свободомыслие он был в 1778 г. отстранен инквизицией от преподавания и осужден. После двухлетнего тюремного заключения работал директором колледжа. Да Кунья написал на португальском языке энциклопедический курс элементарной и высшей математики «Математические начала» в 21 книге. Курс был опубликован в 1782–1790 гг., а в 1811 г. вышел французский перевод.

В одной из глав да Кунья впервые излагает теорию показательной и логарифмической функций, основываясь на понятии сходящего ряда, и указы-

вает, хотя и не всегда в полном виде, области сходимости соответствующих степенных рядов. Из разложения для экспоненты он получает биноминальный ряд для $(1+Q)^n$ при $0<Q<1$. Дифференциальное исчисление да Кунья строит на основе понятий бесконечно малой и дифференциала. Термином «предел» он не пользуется, а бесконечно малую определяет как «переменную, значение которой может всегда стать меньше любой величины». Он дает и определение бесконечно большой. Дифференциалом функции $f(x)$ да Кунья называет величину $df(x)$, для которой отношение $\frac{df(x)}{dx}$ постоянно (при фиксированном x), а $\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}-\frac{df(x)}{dx}$ есть бесконечно малая или нуль, «если dx становится бесконечно малой и если все то, что не зависит от dx, остается постоянным». Он отмечает и геометрический смысл дифференциала – приращение ординаты касательной в соответствующей точке кривой $y=f(x)$. Впрочем, вместо буквы f да Кунья использует здесь букву Г, дифференциал называет флюксией, а производная выступает у него как отношение дифференциалов и не имеет специального термина. «Математические начала» да Куньи не получили широкой известности.

Лакруа

Большое влияние на преподавание математики в конце XVIII в. и в начале XIX в. оказал **Сильвестр Франсуа Лакруа (1765–1843)**, работавший в военных учебных заведениях Франции, в Политической школе (1799–1809), а затем в Сорбонне и Коллеж де Франс. Он написал ряд учебных руководств: «Элементарный курс прямоугольной и сферической тригонометрии и приложение алгебры к геометрии» (1789–1799), выдержавший 25 изданий, значительная часть которого посвящена аналитической геометрии; «Трактат по арифметике» (1797), трехтомный «Трактат по дифференциальному и интегральному исчислению» (1797–1802, второе издание 1810–1819) и полный

«Курс математики» (тт. 1–7, 1796–1799; тт. 1–9, 1811–1816). Содержание этих руководств отражает состояние математики конца XVIII в.

Остановимся кратко на некоторых особенностях «Трактата по дифференциальному и интегральному исчислению». Во введении Лакруа сначала разъясняет понятие о функции и о степенном ряде. Функцию он определят почти по Эйлеру: «Всякая величина, которая зависит от одной или нескольких других величин, называется функцией этих последних, знаем мы или нет, какие операции нужно совершить, чтобы из них получить первую». Лакруа рассматривает и порождаемые элементарными функциями степенные ряды обычно без рассмотрения их сходимости, но показывает сходимость некоторых рядов. В частности, он проводит неполное исследование сходимости биноминального ряда (по Д'Аламберу), а в качестве примера ряда, сходящегося лишь при $x = 0$, указывает ряд $1 + 1 \cdot 2x + 1 \cdot 2 \cdot 3x^2 + \ldots$. В теории пределов доказывает теоремы о единственности предела и о пределе частного. Определения бесконечно малой и бесконечно большой у него отсутствуют, но он объясняет эти понятия, рассматривая довольно общий пример. Общих теорем об операциях над бесконечно малыми он не приводит. Изложение вопроса об элементарных функциях и их разложениях в степенные ряды близко к изложению во «Введении в анализ бесконечных» Эйлера.

Лакруа эклектически сочетает использование пределов и бесконечно малых с подходом Лагранжа к определению производных через коэффициенты разложения приращения функции в ряд по степеням приращения аргумента:

$$u' - u = ph + qh^2 + rh^3 + \ldots .$$

Лакруа полагает $du = ph$, получает, что $dx = h$, $p = \dfrac{du}{dx}$, и называет последнее выражение, т. е. производную, «дифференциальным коэффициентом». Для вывода формул и правил дифференцирования Лакруа часто использует разложения функций в степенные ряды. Он строго придерживается символики Лейбница и критикует введенные Лагранжем обозначения производных с помощью штрихов и индексов. Отметим еще, что

в рассматриваемом трактате Лакруа вводит по аналогии с «Аналитической механикой» Лагранжа термин «аналитическая геометрия», вошедший через несколько лет во всеобщее употребление.

Во второй половине XVIII в. и в начале XIX в. появились крупные труды по истории математики. Французский математик и историк математики **Жан Этьен Монтюкла (1725–1799)**, член Парижской АН, опубликовал «Историю исследований о квадратуре круга» (1754), а затем двухтомную «Историю математики» (1758), в которой довел изложение до начала XVIII в. Для второго издания он начал готовить четырехтомник «История математики», надеясь довести изложение до конца XVIII в. В 1799 г. он издал два тома и умер, не успев завершить третий том. Закончил третий том, написал четвертый и издал их в 1802 г. французский астроном **Ж. Ж. Лаланд (1732–1807)**. Книга имела большой успех, но была не очень доступна из-за большого объема.

Еще больший успех имел меньший по объему двухтомный «Опыт общей истории математики» (1802) преподавателя Политехнической школы, члена Парижской АН **Шарля Боссю (1730–1814)**. Вскоре он был переведен на итальянский, английский и немецкий языки, а в 1810 г. вышло второе французское издание.

Профессор математики в Гёттингене **А. Г. Кестнер (1719–1800)** написал многочисленные учебники, в том числе «Основания арифметики, геометрии и тригонометрии» (1758–1760) и первый немецкий учебник по дифференциальному и интегральному исчислению «Основания анализа бесконечных» (1761). Он опубликовал также «Историю математики» (1796–1800), в которой довел изложение до середины XVII в.

Итоги развития математики в XVIII веке

Дадим общий обзор развития математики XVIII в. по дисциплинам. Если образно сравнить развитие математики со строительством зданий, то в XVII в. лишь наметились контуры нескольких из них, а в XVIII в. были

построены крупные каркасы этих и некоторых новых зданий, в общих чертах уже во многом напоминающих современные математические дисциплины. XVIII век называют классическим периодом развития математики.

В социально-экономическом отношении XVIII век представляет собой дальнейшее укрепление капиталистического способа производства и углубление научно-технической революции, требовавшей ускоренного развития математики и ее приложений. Математика XVIII века в меньшей степени связана с деятельностью университетов и в большей – с деятельностью академий. Величайшие математики XVIII в. Эйлер и Лагранж очень плодотворно работали в академиях: Эйлер – в Петербургской и Берлинской; Лагранж – в Берлинской, а затем совмещал работу в академических учреждениях в Париже с преподаванием в Политехнической школе. В XVIII в. возросло число периодических изданий и несравненно увеличился объем публикуемых материалов.

Ведущее положение в математике XVIII в. занимает математический анализ в широком смысле, включающий в себя ряд других математических дисциплин, которые уже начали постепенно выделятся из него. Прежде всего было определено, хотя еще и не четко, понятие функции (Лейбниц, И. Бернулли, Эйлер) и осознана его фундаментальная роль в анализе (Эйлер). Ведущая роль в классификации и разработке теории элементарных функций (включая показательную, логарифмическую, тригонометрические и обратные тригонометриические) принадлежит Эйлеру в его «Введении в анализ бесконечных» (1748). В частности, он определил экспоненту и логарифм в комплексной области, доказал формулу $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Для исследования функций и вычислений он широко использует ряды. Сходимость рядов Эйлер намеренно понимал в обобщенном смысле. Большинство математиков XVIII в., включая Эйлера, не заботилось о сходимости рядов, но получали правильные результаты с их помощью, т. к. имели дело пока только с аналитическими функциями. Впрочем, Д'Аламбер выступал за использование лишь сходящихся рядов и привел, хотя и в некорректной форме, свой признак сходимости ряда. Маклорен дал свой

интегральный признак сходимости ряда. Эйлер, а за ним независимо Маклорен привели формулу суммирования рядов. В 1715 г. Тейлор опубликовал ряд, носящий его имя. Эйлер разложил некоторые элементарные функции, хотя и не строго, в бесконечные произведения. Он же заложил основы теории цепных дробей. Лагранж и Ламберт привели разложения функций в цепные дроби. С помощью разложений в цепные дроби функций $th\ x$ и $tg\ x$, соответственно, была доказана иррациональность чисел e (Ламберт) и π (Ламберт, Лежандр).

Из числа новых результатов в дифференциальном исчислении отметим полученные Лагранжем теорему о конечных приращениях, «формулу Тейлора» (у Тейлора ее не было) с остаточным членом в форме Лагранжа, метод неопределенных множителей Лагранжа в теории условного экстремума, найденный ранее Д'Аламбером и Эйлером.

В интегральном исчислении были систематизированы и разработаны методы интегрирования различных классов функций (Эйлер), введены несобственные интегралы (Маклорен). Эйлер вычислил огромное число определенных интегралов, как собственных, так и несобственных, в том числе несколько классических интегралов, позже вычисленных и другими математиками в XIX в. (например, интеграл Дирихле, интегралы Френеля). Был введен криволинейный интеграл II типа (Клеро), двойные и тройные интегралы (Эйлер, Лагранж). Эйлер разработал теорию B и Γ-функций. Фаньяно и Эйлер первыми приступили к изучению эллиптических интегралов, Эйлер получил для них теорему сложения. В конце XVIII в. Лежандр дал классификацию эллиптических интегралов на три типа и провел дальнейшее детальное их изучение. Характерной особенностью интегрального исчисления в XVIII в. является то, что определенный интеграл вводили не через интегральную сумму, а через приращение первообразной. Заметим, что Эйлер и Лагранж написали ряд прекрасных руководств по математическому анализу. Уже в трудах Эйлера дифференциальное и интегральное исчисление превратилось в отдельную от геометрии и механики науку. Эйлер, а за ним и Лагранж излагают его аналитически, т. е. в виде формул, не пользуясь рисунками.

Бурно развиваясь, математический анализ в XVIII в. не имел строгого логического обоснования. Это дало повод французскому философу Вольтеру охарактеризовать математический анализ как «искусство считать и точно измерять то, существование чего непостижимо для разума». Критика английским философом-идеалистом епископом Беркли основных понятий и методов дифференциального исчисления побудила математиков принять меры по обоснованию математического анализа. Маклорен использовал для этой цели кинематико-геометрический подход с оформлением в античном духе, а ряд других математиков XVIII в. – понятие предела (Робинс, Д'Аламбер, Люилье, Гурьев). Убежденным сторонником и пропагандистом метода пределов был Д'Аламбер, поместивший много своих статей по математическим вопросам в грандиозной «Энциклопедии», издаваемой в 1751–1780 гг. коллективом французских просветителей (XVIII век часто называют веком Просвещения). Однако понятие предела в XVIII в. было узким, большинство математиков имело в виду односторонний предел монотонной величины. Предпринимались в XVIII в. и другие попытки обоснования математического анализа («теория нулей» Эйлера, определение Лагранжа производных функций с помощью коэффициентов заранее постулируемого разложения функции в степенной ряд и др.). В конце XVIII в. Карно дает четкие определения предела переменной величины и бесконечно малой и сравнивает ряд предпринятых ранее способов построения и обоснования математического анализа. Противоречивый характер развития математического анализа в XVII–XVIII вв. ярко описан в книге американского математика М. Клайна [179, гл. VI «Нелогическое развитие: в трясине математического анализа»]. Обоснование классического математического анализа было осуществлено в течение XIX в.

В XVIII в. начинает выделяться теория дифференциальных уравнений – обыкновенных и с частными производными, хотя ее еще считали ветвью интегрального исчисления. В трехтомном «Интегральном исчислении» Эйлера только половина первого тома посвящена интегрированию функций,

а остальной материал – дифференциальным уравнениям – обыкновенным и с частными производными. Уже в 90-х гг. XVII в. были проинтегрированы в квадратурах большинство типов обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка (Лейбниц, Якоб и Иоганн Бернулли). В XVIII в. продолжается изучение уравнений первого порядка: в полных дифференциалах (Клеро, Эйлер); уравнением Риккати занимались Риккати и Эйлер; разрабатывается теория интегрирующего множителя (Эйлер, Д'Аламбер). Для численного решения дифференциальных уравнений первого порядка Эйлер предложил метод ломаных. С Эйлера начинается изучение линейных дифференциальных уравнений n-го порядка, он ввел для них понятия частного и общего решений. Был разработан метод вариации постоянной (Эйлер и Д. Бернулли – для уравнений 2-го порядка, Лагранж – для уравнений n-го порядка). Лагранж и Эйлер для линейных дифференциальных уравнений n-го порядка ввели сопряженные дифференциальные уравнения. Тейлор впервые столкнулся с особым решением дифференциального уравнения и ввел термин «особое решение». Клеро для уравнений, которые носят его имя, впервые показал, что их особое решение представляет собой огибающую семейства интегральных прямых, составляющих общее решение. Общую теорию особых решений обыкновенных дифференциальных уравнений разработал Лагранж.

Лагранж, Лаплас и Эйлер в XVIII в. указали способы решения конечно-разностных уравнений n-го порядка как с постоянными, так и с переменными коэффициентами. Лаплас широко применяет конечно-разностные уравнения в теории вероятностей, решая их, в частности, с помощью интегральных преобразований, одно из которых носит его имя. Ранее оно встречается у Эйлера, который использовал его для решения обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Лаплас использует свое преобразование также для получения асимптотики Γ-функции.

Параллельно развивается теория уравнений с частными производными, играющая основную роль в математической физике. Так называемое

уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$ вывели Эйлер и Д'Аламбер, а позже его исследовал Лаплас. Задачей о колебании струны вначале занялись Тейлор и Д. Бернулли, уравнение колебаний струны вывел Д'Аламбер в виде $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Эйлер очень просто решил его с помощью замены $\xi=x+at$, $\eta=x-at$, Д'Аламбер применил иной способ и нашел решение в виде $u=\varphi(at+x)+\psi(at-x)$, а Д. Бернулли привел решение в виде тригонометриического ряда. При этом возникла острая дискуссия по поводу того, какие функции могут входить в начальное условие и в решение. Она способствовала лучшему осмыслению понятия функции. Попутно отметим, что Клеро и Эйлер до Фурье получили так называемые коэффициенты Фурье a_k для случая разложения функции в ряд по косинусам. Эйлер вывел уравнение колебаний мембраны $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, задолго до Бесселя свел его к так называемому уравнению Бесселя и нашел его решение. Рассматривая вопрос о движении жидкости, Д'Аламбер и Эйлер пришли к так называемым уравнениям Коши–Римана аналитичности функции задолго до Коши и Римана. Уже Эйлер и Д'Аламбер начали рассматривать уравнения с частными производными первого порядка. Квазилинейное уравнение первого порядка вида $P(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+Q(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=R(x,y,z)$ решили почти одновременно Лаплас и Лагранж. Метод Лагранжа используется и в настоящее время, он заключается в сведении этого уравнения к системе обыкновенных уравнений $\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}$. Лагранж и Шарпи дали также метод решения нелинейных уравнений вида $F(x,\ y,\ z,\ p,\ q)=0$, где $p=\frac{\partial z}{\partial x}$, $q=\frac{\partial z}{\partial y}$. Геометрическую трактовку решений линейных и нелинейных дифференциальных уравнений



Феофан Прокопович



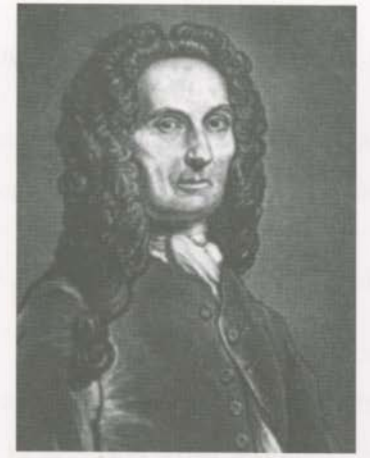
Брук Тейлор



Джордж Беркли



Колин Маклорен


Абрахам де Муавр


Джеймс Стирлинг


Эдуард Варинг


Леонард Эйлер


Даниил Бернулли


Алексис Клод Клеро



Жан ле Рон Д'Аламбер



Жозеф Луи Лагранж



Иоганн Генрих Ламберт



Адриен Мари Лежандр



Софи Жермен

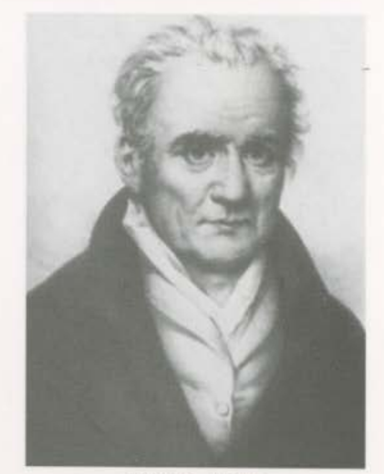


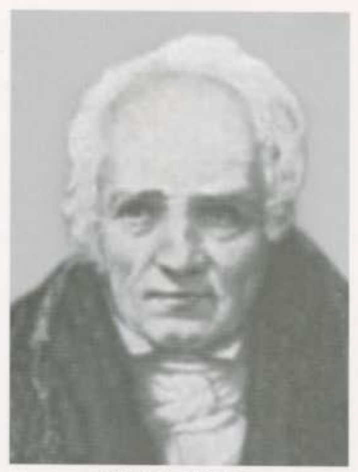
Пьер Симон Лаплас


Томас Байес


Габриэль Крамер


Этьен Безу


Гаспар Монж


Симон Люилье


Лазар Никола Маргерит Карно

с частными производными первого порядка наиболее полно выразил Монж. Лагранж, Лаплас и Лежандр заложили основы теории потенциала. Лагранж представил объемный потенциал поля тяготения в виде тройного интеграла, ввел понятие потенциальной функции. Лаплас показал, что объемный потенциал удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$, которое затем стали называть уравнением Лапласа, и решил его, введя так называемые сферические функции. Менее общий вид сферических функций получил Лежандр (полиномы Лежандра от $\cos\theta$).

Уже в XVII в. были решены некоторые задачи, относящиеся к вариационному исчислению (о брахистохроне, о геодезических). В XVIII в. Эйлер и Лагранж заложили основы вариационного исчисления. Эйлер впервые поставил вариационную задачу в общем виде как задачу нахождения кривой $y = y(x)$, доставляющей экстремум интегралу вида $J[y]=\int_a^b f(x,\ y,\ y',\ \dots,\ y^{(n)})dx$ (в несколько иных обозначениях). Применяя свой метод ломаных (первый из так называемых прямых методов вариационного исчисления), Эйлер свел вариационную задачу к задаче на экстремум функции многих переменных и получил необходимое условие экстремума интеграла в виде дифференциального уравнения, которое носит его имя. Лагранж применил свой метод вариаций: ввел символ δ, названный впоследствии Эйлером вариацией, и с помощью интегрирования по частям проще получил необходимое условие Эйлера для экстремума интеграла. Лагранж рассмотрел и случай подынтегральной функции вида $f(x,\ y,\ z,\ y',\ \dots,\ y^{(n)},\ z^{(n)})$, а кроме того, задачу с подвижными концами и вариационную задачу на условный экстремум. Эйлер и Лагранж предполагали, что вариации как функций, так и их производных, являются бесконечно малыми, т. е. имели дело со слабым экстремумом. Достаточные

условия слабого экстремума, хотя и не в окончательном виде, получил Лежандр, используя вторую вариацию.

Среди наук, требующих применения математического анализа, в XVIII в. ведущую роль играла механика. Ею занимались почти все крупные математики в XVIII в. Если в XVII в. механика оказала мощное воздействие на развитие математического анализа, то в XVIII в. она развивается уже на основе анализа, а точнее на основе дифференциальных уравнений. Эйлер в двухтомной «Механике, или науке о движении, изложенной аналитическим методом» (1736) разрабатывает динамику точки и динамику твердого тела. Д'Аламбер в «Трактате о динамике» (1748) приводит свой принцип, сводящий динамические задачи к статическим. Гидравлику и гидродинамику начинают разрабатывать Иоганн и Даниил Бернулли, а затем Эйлер и Лагранж выводят основные дифференциальные уравнения движения идеальной жидкости. Мопертюи и Эйлер вводят принцип наименьшего действия. Наиболее общее изложение принципов механики дал Лагранж в своей знаменитой «Аналитической механике» (1788). Он приводит здесь общие уравнения статики и динамики системы материальных точек, из которых выводит условия равновесия тел и жидкостей. Лагранж излагает механику чисто аналитически, без единого чертежа. Большие успехи в XVIII в. были достигнуты в небесной механике, которой много занимались Эйлер, Д'Аламбер, Лагранж, Лаплас, Клеро и др. В частности, были разработаны методы малого параметра для решения широко применяемых в небесной механике обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка.

В XVIII в. оформилась как наука аналитическая геометрия. Ведущая роль в этом отношении принадлежит Эйлеру. Во II томе «Введения в анализ бесконечных» (1748) он вводит преобразования прямоугольных и косоугольных координат, строит теорию кривых 2-го порядка, дает отличную от ньютоновой классификацию кривых 3-го порядка на 16 родов на основе изучения бесконечных ветвей и асимптот кривых. Далее он классифицирует кривые 4-го порядка на 146 родов. Французский математик Ж. П. Гюа де Мальв (1712–1785)

начинает изучать особые точки алгебраических кривых $F(x, y) = 0$ порядка n, не пользуясь дифференцированием; он же ввел и термин «особая точка». Он трактовал бесконечно удаленные точки кривых как особые точки, которые переводил в начало координат проективным преобразованием. «Многоугольник Ньютона» Гюа де Мальв преобразовывал в «алгебраический треугольник». Эйлер алгебраически изучает особые точки алгебраических кривых вида $F(x, y) = 0$. В своем огромном труде Крамер с помощью многоугольника Ньютона изучает особые точки алгебраических кривых вида $F(x, y) = 0$, находя в случае необходимости более чем один член соответствующих рядов. Он же дал подробную классификацию алгебраических кривых до 5-го порядка включительно. Для кривых первых 8 порядков Крамер составил таблицу кратных точек. Рассматривая случаи взаимного расположения двух «подобных и равных частей» кривой, Эйлер по существу классифицирует движения плоскости, он же вводит аффинное преобразование кривых. Поверхности 2-го порядка начали изучать в 1730-х гг. XVIII в. Герман и Клеро, а систематически изучил поверхности 2-го порядка и дал их классификацию Эйлер в «Приложении к поверхностям» во II томе «Введения в анализ бесконечных (1748). Отметим, что Эйлер открыл неизвестную до него поверхность – гиперболический параболоид. Изучением свойств поверхностей 2-го порядка занимался также Монж, предложивший современные их названия. Он же рассмотрел основные задачи на прямую и плоскость.

Дифференциальная геометрия в XVIII в. развивалась в качестве приложений анализа к геометрии. Изучались, в частности, плоские кривые, получаемые при интегрировании дифференциальных уравнений, заданных соотношениями между дугой s и радиусом кривизны R кривой или радиус-вектором и радиусом кривизны (Эйлер и др.). Пространственные кривые начал изучать Клеро, а Монж положил начало дифференциальной геометрии пространственных кривых. Эйлер и Клеро рассматривали геодезические на поверхностях. Дифференциальной геометрией поверхностей занимались Эйлер и Монж. Эйлер ввел и изучил нормальные сечения поверхностей, т. е.

линии пересечения поверхностей плоскостями, проходящими через нормаль к поверхности, и установил связь между кривизной любого нормального сечения и главными кривизнами. Ж. Мёнье (1754–1793), ученик Монжа, который погиб, сражаясь за республику, нашел связь между кривизной сечения поверхности плоскостью и кривизной нормального сечения. Эйлер вводит развертывающиеся поверхности и находит условия развертывания, дальнейшее детальное изучение таких поверхностей предпринял Монж. Введение линий кривизны на поверхностях и изучение этих линий тоже принадлежит Монжу.

Начертательная геометрия в виде, близком к современному, была разработана и изложена в XVIII в. Монжем.

В предыстории неевклидовой геометрии существенное значение имел прогресс, который был достигнут в XVIII в. в разработке теории параллельных линий. При попытке доказать V постулат Евклида Саккери в случае гипотезы острого угла получил ряд фактов неевклидовой геометрии. Еще больше следствий из гипотезы острого угла, относящихся к неевклидовой геометрии, нашел Ламберт: в частности, факт существования абсолютной меры длины, а также тот факт, что «угловой дефект» треугольника пропорционален его площади. Он впервые высказал предположение, что гипотеза острого угла должна выполняться на какой-то мнимой сфере. Представляют интерес также попытки Лежандра доказать V постулат Евклида.

К топологии относится знаменитая теорема Эйлера о связи числа вершин, ребер и граней многоугольника, ее обобщил Люилье. Топологический характер имеет и решенная Эйлером задача о семи кёнигсбергских мостах.

В первые годы XIX в. Карно возрождает проективную геометрию.

Больших успехов в теории чисел в XVIII в. достигли Эйлер и Лагранж. В работах Эйлера она превратилась в науку. Он доказал почти все многочисленные утверждения Ферма, который высказал их XVII в. в замечаниях на полях «Арифметики» Диофанта и в письмах. В частности, Эйлер

доказал Великую теорему Ферма для $n=3$, а также малую теорему Ферма, которую Эйлер обобщил, введя функцию $\varphi(m)$. Эйлер ввел понятия «вычет», «невычет» и глубоко изучил квадратичные вычеты. Например он нашел (хотя и не смог доказать) закон взаимности в теории вычетов, его в XIX в. доказал Гаусс. Аналитическому направлению в теории чисел положили исследования Эйлером ζ-функции. Эйлер занимался и аддитивной теорией чисел. Много работ Эйлер посвятил диофантову анализу. В частности, он использовал свою теорему сложения эллиптических интегралов для отыскания рациональных точек на эллиптических кривых и тем самым дополнил «метод секущих» Диофанта, пролагая путь для Пуанкаре. Эйлер получил формулу для бесконечного числа решений в целых числах уравнений $ax^2+1=y^2$ и $ax^2+b=y^2$, где a, b – целые, причем a не является квадратом. Эти уравнения имеют большую историю. На неполноту формул Эйлера в этом вопросе указал Лагранж, который провел полное исследование. Лагранж занимался также вопросами о представлении натуральных чисел в виде сумм квадратов, положил начало теории классов форм, исследуя вопрос о преставлении натуральных чисел квадратичными формами. Некоторые новые результаты в теории чисел в XVIII в. получили Ламберт, Лежандр и др. Первое систематическое изложение теории чисел принадлежит Лежандру. Гаусс, будучи студентом в последние годы XVIII в., глубоко продвинулся в теории чисел в большой книге «Арифметические исследования» (1801), которая по духу и содержанию относится уже к математике XIX века.

В алгебре в XVIII в. были достигнуты значительно более скромные успехи, чем в анализе, геометрии, теории чисел и механике. Прежде всего, отметим зарождение понятия определителя у Лейбница и первые исследования свойств определителей (Крамер, Безу, Вандермонд, Лаплас, Лагранж). Крамер дал метод решения систем линейных уравнений с помощью определителей. Эйлеру и Д'Аламберу принадлежат первые, хотя и не полные доказательства основной теоремы алгебры о существовании корня алгебраи-

ческого многочлена (первые полные ее доказательства дал Гаусс в начале XIX в.). Варинг исследовал симметрические функции. Разрабатывались также новые способы приближенного вычисления корней алгебраических уравнений (Лагранж – с помощью цепных дробей, Ламберт – два оригинальных способа). Лагранж рассмотрел вопрос о приведении квадратичной формы к каноническому виду путем выделения полных квадратов. Важнейшим достижением в алгебре XVIII в. явились результаты Лагранжа в теории решения алгебраических уравнений в радикалах. Здесь у Лагранжа впервые появляются очень важные элементы будущей теории групп. Изучая вопрос о числе различных значений, принимаемых рациональной функцией $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ от корней уравнения при всевозможных перестановках этих корней, Лагранж впервые приступает к исследованию группы подстановок. Он разбивает ее на смежные классы по подгруппе подстановок, оставляющих неизменной функцию $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ (не вводя терминов «группа», «подгруппа», «смежный класс»), и доказывает носящую его имя теорему о том, что порядок подгруппы является делителем порядка группы. Действуя по своей схеме, Лагранж выражает в радикалах корни уравнений 3-й и 4-й степеней и циклических уравнений любой степени и высказывает сомнение в том, что любое уравнение степени $n \geq 5$ разрешимо в радикалах. Вандермонд дал первое, хотя и неполное исследование вопроса о разрешимости уравнения $x^n - 1 = 0$ в радикалах.

В XVIII в. алгебра, как и анализ, оставалась логически необоснованной. Делались, хотя и безуспешные, попытки строгого обоснования отрицательных чисел и правил действий над ними. Вессель в 1799 г. и Арган в 1806 г. дали геометрическую интерпретацию комплексных чисел и правил действий над ними, но их работы долго оставались неизвестными, а известность получили соответствующие результаты Гаусса в работе 1832 г.

Большие успехи в XVIII в. были достигнуты в теории вероятностей, которая начала оформляться как наука. В книге Я. Бернулли «Искусство

предположений» (1713), опубликованной после его смерти, приведен закон больших чисел в форме Бернулли. Муавр в начале XVIII в. дал так называемое классическое определение вероятности, впрочем неявно предполагая, что события равновероятны. Четкое классическое определение вероятности привел Лаплас в 1812 г. Муавр дал определения независимых и зависимых событий и, пользуясь понятием условной вероятности, привел теорему об умножении вероятностей. Байес в 1763 г. определил несовместные события. На протяжении XVIII в. был решен ряд задач теории вероятностей: задача о разорении игрока (Якоб и Николай Бернулли, Муавр, Лаплас), задачи на геометрические вероятности (Симпсон, Бюффон), «урновые» схемы (Д. Бернулли, Лаплас). При этом широко использовались конечно-разностные уравнения, которые в случае необходимости заменялись дифференциальными. Муавр первым получил локальную и интегральную предельные теоремы в теории вероятностей, а Лаплас доказал их в несколько более общей формулировке. Формула полной вероятности, «формула Байеса» для апостериорных вероятностей (их у Байеса не было), а также определение математического ожидания были даны Лапласом. Крупным успехом в теории вероятностей явилась полученная в 1809 г. Лапласом центральная предельная теорема для сумм n независимых случайных величин. Понятия случайной величины тогда еще не было введено, Лаплас говорит о случайных ошибках наблюдения. Многие математики XVIII в. и начала XIX в. уделяли внимание теории ошибок наблюдения (Коутс, Симпсон, Ламберт, Д. Бернулли, Лаплас, Гаусс, Лежандр). Наиболее продвинулся в этом направлении Гаусс. Он и за ним Лежандр разработали с этой целью метод наименьших квадратов. Теория вероятностей в XVIII в. находит применение в вопросах демографии, страхового дела. Итоги векового развития теории вероятностей подвел Лаплас в книге «Аналитическая теория вероятностей» (1812) и «Опыт философии теории вероятностей» (1814).

Достижения математики XVII–XVIII вв. отразились и на ее преподавании. В XVIII в. появились многочисленные учебные руководства как по математике в целом, так и по отдельным дисциплинам (в Германии – Вольфа,

Кестнера, Эйлера; в Британии – Маклорена; в России – Магницкого, Котельникова, Эйлера, Гурьева; во Франции – учебные руководства Клеро, Безу, Лагранжа, Монжа, Лежандра, Лакруа). В XVIII в. появились крупные труды по истории математики, составленные Монтюкла, Боссю и Кестнером.

В целом достижения математики XVIII в. впечатляют широтой охвата тем и объемом содержания. Но уровень строгости формулировок теорем и их доказательств в XVIII в. во многом очень уступает достигнутому в XIX в. и в настоящее время.

Об истории математики в XVIII в.: [1, тт. 2–3; 2–9; 59–106; 155; 157–162; 190; 191; 194,196–198; 10–23; 214].

ЛИТЕРАТУРА

а) общая для всех периодов развития математики

1. История математики с древнейших времен до начала XIX столетия: В 3-х т. / Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1970–1971. – Т. 1–3.
2. Хрестоматия по истории математики: Арифметика и алгебра. Теория чисел. Геометрия / Сост. И. Г. Башмакова и др. Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1976. – 320 с.
3. Хрестоматия по истории математики: Математический анализ. Теория вероятностей / Сост. И. Г. Башмакова и др. Под ред. А. П. Юшкевича. – М.: Просвещение, 1977. – 224 с.
4. Вилейтнер Г. Хрестоматия по истории математики, вып. 1–4. – М.; Л.: ГТТИ, 1932; 2-е изд. – М.; Л.: ОНТИ, 1935.
5. Рыбников К. А. История математики. – 2-е изд. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1974. – 454 с.
6. Рыбников К. А. Возникновение и развитие математической науки. – М.: Просвещение, 1987. – 160 с.
7. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. – 5-е изд., испр. / Пер. с нем. И. Б. Погребысского. – М.: Наука, 1990. – 254 с.
8. Бурбаки Н. Очерки по истории математики. – М.: ИЛ, 1963. – 291 с.
9. Даан-Дальмедико А., Пейффер Ж. Пути и лабиринты: Очерки по истории математики. – М.: Мир, 1986. – 432 с.
10. Болгарский Б. В. Очерки по истории математики. – Минск: Вышэйшая шк., 1974. – 367 с.
11. Шереметевский В. П. Очерки по истории математики. – М.: Учпедгиз, 1940. – 179 с.
12. Глейзер Г. И. История математики в школе: Пособие для учителей: В 3-х кн. – М.: Просвещение, 1981–1983.
13. Математический энциклопедический словарь. – М.: Сов. энцикл., 1988. – 848 с.
14. Боголюбов А. Н. Математики, механики: Биографический справочник. – К.: Наукова думка, 1983. – 639 с.
15. Бородин А. И., Бугай А. С. Выдающиеся математики: Биографический словарь-справочник. – К.: Рад. шк., 1987. – 656 с.

16. Бородин А. И., Бугай А. С. Биографический словарь деятелей в области математики. – К.: Рад. шк., 1979. – 608 с.
17. Бородін О. І., Бугай А. С. Біографічний словник діячів у галузі математики. – К.: Рад. шк., 1973. – 552 с.
18. Конфорович А. Г. Колумби математики. – К.: Рад. шк., 1982. – 224 с.
19. Чистяков В. Д. Рассказы о математиках. – Минск: Вышэйшая шк., 1966. – 409 с.
20. Шеренга великих математиков. – Варшава: Наша ксенгарня, 1970. – 187 с.
21. Историко-математические исследования. – М. (Сборники выходили с 1948 г.)
22. Колмогоров А. Н. Математика в ее историческом развитии. – М.: Наука, 1991. – 224 с.
23. Александрова Н. В. Математические термины. – М.: Высшая шк., 1978. – 189 с.

б) к периодам древности и Средних веков

24. Ван дер Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука: Математика древнего Египта, Вавилона и Греции. – М.: Физматгиз, 1959. – 459 с.
25. Выгодский М. Я. Арифметика и алгебра в древнем мире. – М.: ГИТТЛ, 1967. – 368 с.
26. Нейгебауэр О. Точные науки в древности. – М.: Наука, 1968. – 224 с.
27. Кольман Э. Я. История математики в древности. – М.: Физматгиз, 1961. – 235 с.
28. Цейтен Г. Г. История математики в древности и в средние века. – М.; Л.: ГТТИ, 1932 (1938). – 230 с.
29. Фрагменты ранних греческих философов. – Ч. I / Подготовил А. В. Лебедев. – М.: Наука, 1989. – §§ 11, 14, 18, 29, 42, 43, 58.
30. Башмакова И. Г. Лекции по истории математики в Древней Греции. – [21], 1958. – Вып. 11. – С. 225–438.
31. Жмудь Л. Я. Пифагор и его школа. – Л.: Наука, 1990. – 192 с.
32. Боро В. и др. Живые числа: Пять экскурсий. – М.: Мир, 1985. – 128 с.
33. Чистяков В. Д. Три знаменитые задачи древности. – М.: Учпедгиз, 1963. – 96 с.
34. Прасолов В. В. Три классические задачи на построение: удвоение куба, трисекция угла, квадратура круга. – М.: Наука, 1992. – 80 с.
35. Зубов В. П. Аристотель. – М.: Наука, 1963. – 366 с.
36. Архимед. Сочинения. – М.: Физматгиз, 1962. – 640 с.
37. Лурье С. Я. Архимед. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1945. – 271 с.
38. Башмакова И. Г. Становление алгебры. – М.: Знание, 1979. – 64 с.

39. Башмакова И. Г. Диофант Александрийский и его «Арифметика» // Диофант. Арифметика и книга о многоугольных числах. – М.: Наука, 1974. – С. 5–27.
40. Башмакова И. Г., Славутин Е. И. История диофантова анализа от Диофанта до Ферма. – М.: Наука, 1984. – 256 с.
41. Башмакова И. Г. Диофант и диофантовы уравнения. – М.: Наука, 1972. – 68 с.
42. Березкина Э. И. Математика древнего Китая. – М.: Наука, 1980. –311 с.
43. Юшкевич А. П. История математики в средние века. – М.: Физматгиз, 1961.– 448 с.
44. Володарский А. П. Очерки истории средневековой индийской математики. – М.: Наука, 1977. – 183 с.
45. Володарский А. П. Ариабхата. – М.: Наука, 1977. – 112 с.
46. Матвиевская Г. П., Розенфельд Б. А. Математики и астрономы мусульманского средневековья и их труды (VIII – XVII вв.): В 3-х кн. – М.: Наука, 1983. – Кн. 1–3.
47. Матвиевская Г. П. Очерки по истории тригонометрии. – Ташкент: Фан, 1990. – 160 с.
48. Мухаммад ибн-Муса ал-Хорезми: Сборник статей к 1200-летию со дня рождения. – М.: Наука. 1983. – 264 с.
49. Кедров Б. М., Розенфельд Б. А. Абу Рейхан Бируни. – М.: Наука, 1973. – 55 с.
50. Розенфельд Б. А., Юшкевич А. П. Омар Хайям. – М.: Наука, 1965. – 191 с.
51. Розенфельд Б. А. История неевклидовой геометрии. – М.: Наука, 1976. – 413 с.
52. Симонов Р. А. Кирик Новгородец. – М.: Наука, 1980. – 112 с.
53. Кымпан Ф. История числа π. – М.: Наука, 1971. – 216 с.
54. Гребеников Е. А. Николай Коперник. – М.: Мол. гвардия, 1982. – 147 с.
55. Белый Ю. А. Иоганн Мюллер (Региомантан). – М.: Наука, 1985. – 128 с.
56. Гутер Р. С, Полунов Ю. Л. Джироламо Кардано. – М.: Знание, 1980. – 192 с.
57. Никифоровский В. А. Из истории алгебры XVI – XVII вв. – М.: Наука, 1979. – 208 с.
58. Никифоровский В. А. В мире уравнений. – М.: Наука, 1987. – 173 с.

в) к истории математики в Новое время

59. Юшкевич А. П. Из истории возникновения математического анализа. – М.: Знание, 1985. – 48 с.
60. Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: В 2-х т. – М.: ГИТТЛ, 1955. – Т. 1. – С. 411–433; 1956. – Т. 2. – С. 176–178, 291–293, 356, 424–456.

(Здесь содержатся очерки о возникновении и развитии математического анализа.)

61. Цейтен Г. Г. История математики в XVI и XVII веках. – М.; Л.: ГТТИ, 1933 (1938). – 430 с.
62. Гиршвальд Л. Я. История открытия логарифмов. – Х.: Изд-во ХГУ им. А. М. Горького, 1952. – 32 с.
63. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Джон Непер (1550 – 1617). – М.: Наука, 1980. – 224 с.
64. Белый Ю. А. Иоганн Кеплер (1571 – 1630). – М.: Наука, 1971. – 296 с.
65. Кузнецов Б. Г. Галилей. – М.: Наука, 1964. – 326 с.
66. Декарт Р. Геометрия. С приложением избранных работ П. Ферма и переписки Декарта. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1938. – 296 с.
67. Матвиевская Г. П. Рене Декарт. – М.: Наука, 1976. – 271 с.
68. Ферма П. Исследования по теории чисел и диофантову анализу. – М.: Наука, 1992. – 320 с.
69. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия. – М.: Наука, 1966. – 506 с.
70. Замечательные ученые / Под ред. С. П. Капицы. – М.: Наука, 1980. – 192 с.
71. Гиндикин С. Г. Рассказы о физиках и математиках. – М.: Наука, 1981. – 92 с.
72. Никифоровский В. А., Фрейман Л. С. Рождение новой математики. – М.: Наука, 1976. – 300 с.
73. Фрейман Л. С. Творцы высшей математики. – М.: Наука, 1968. – 216 с.
74. Белл Т. Творцы высшей математики. – М.: Просвещение, 1979. – 251 с.
75. Кляус Е. М., Погребысский И. Б., Франкфурт У. И. Паскаль. – М.: Мысль, 1971. – 430 с.
76. Тарасов Б. М. Паскаль. – М.: Мол. гвардия, 1982. – 334 с.
77. Конфорович А. Г. У пошуках інтеграла. – К.: Рад. шк., 1990. – 256 с.
78. Никифоровский В. А. Путь к интегралу. – М.: Наука, 1985. – 192 с.
79. Медведев Ф. А. Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1974. – 424 с.
80. Песин И. Н. Развитие понятия интеграла. – М.: Наука, 1966. – 208 с.
81. Франкфурт У. И., Френк А. М. Х. Гюйгенс. – М.: Изд-во АН СССР, 1962. – 327 с.
82. Вавилов С. И. Исаак Ньютон (1643 – 1727). – М.: Наука, 1989. – 272 с.
83. Карцев В. П. Ньютон. – М.: Мол. гвардия, 1987. – 416 с.

84. Исаак Ньютон: Сб. статей к 300-летию со дня рожд. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1943.
85. Юшкевич А. П. О математических рукописях Ньютона. – [21], 1977. – Вып. 22. – С. 127–192.
86. Арнольд В. И. Гюйгенс и Барроу, Ньютон и Гук. – М.: Наука, 1989. – 96 с.
87. Погребысский И. Б. Готфрид Вильгельм Лейбниц (1644 – 1716). – М.: Наука, 1971. – 320 с.
88. Юшкевич А. П. Лейбниц и основания исчисления бесконечно малых // Успехи матем. наук, 1948. – Т. 3. – Вып. 1(23). – С. 150–164. Там же: Избранные отрывки из матем. сочинений Лейбница / Составил и перевел А. П. Юшкевич. – С. 165–204.
89. Лопиталь Г. Ф. де. Анализ бесконечно малых. – М.; Л.: ГТТИ, 1935. – 432 с.
90. Никифоровский В. А. Великие математики Бернулли. – М.: Наука, 1984. – 177 с.
91. Григорьян А. Т., Ковалев Б. Д. Даниил Бернулли (1700 – 1782). – М.: Наука, 1981. – 320 с.
92. Тиле Р. Леонард Эйлер. – К.: Вища шк., 1983. – 192 с.
93. Юшкевич А. П. Леонард Эйлер. – М.: Знание, 1982. – 64 с.
94. Котек В. В. Леонард Ейлер. – К.: Рад. шк., 1957. – 84 с.
95. Леонард Эйлер: Сб., посв. 250-летию со дня рожд. – М.: Наука, 1958. – 610 с.
96. Леонард Эйлер: Сб. статей и материалов к 150-летию со дня смерти. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1935. – 239 с.
97. Развитие идей Леонарда Эйлера и современная наука. – М.: Наука, 1988. – 519 с.
98. Добровольский В. А. Д'Аламбер. – М.: Знание, 1968. – 31 с.
99. Тюлина И. А. Жозеф Луи Лагранж (1736 – 1813). – М.: Наука, 1977. – 224 с.
100. Жозеф Луи Лагранж: Сб. статей к 200-летию со дня рожд. – М.: Наука, 1937. – 559 с.
101. О квадратуре круга / Сост. Ф. Рудио. Пер. с нем. под ред. и с примеч. С. Н. Бернштейна. – 3-е изд. – М.; Л.: Научтехиздат, 1936. – 235 с.
102. Юшкевич А. П. Идеи обоснования математического анализа в XVIII веке // Карно Л. Размышления о метафизике исчисления бесконечно малых. – М.; Л.: ГТТИ, 1936.
103. Воронцов-Вельяминов Б. А. Лаплас. – М.: Наука, 1985. – 288 с.

104. Боголюбов А. Н. Гаспар Монж (1746 – 1818). – М.: Наука, 1978. – 184 с.
105. Стройк Д. Я. Очерки истории дифференциальной геометрии до XX ст. – М.; Л.: Гостехиздат. – 1941. – 80 с.
106. Молодший В. Н. Основы учения о числе в XVIII в. и начале XIX в. – М.: Учпедгиз, 1963. – 262 с.
107. Математика XIX в.: Математическая логика. Алгебра. Теория чисел. Теория вероятностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1978. – 255 с.
108. Математика XIX в.: Геометрия. Теория аналитических функций / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1981. – 269 с.
109. Математика XIX в.: Чебышёвское направление в теории функций. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Вариационное исчисление. Теория конечных разностей / Под ред. А. Н. Колмогорова и А. П. Юшкевича. – М.: Наука, 1987. – 318 с.
110. Бюлер В. Гаусс. – М.: Наука, 1989. – 208 с.
111. Карл Фридрих Гаусс: Сб. статей к 100-летию со дня смерти / Под ред. И. М. Виноградова. – М.: Изд-во АН СССР, 1956. – 311 с.
112. Кольман Э. Б. Бернард Больцано. – М.: Изд-во АН СССР, 1955. – 224 с.
113. Добровольский В. А. Юность и зрелость Коши // Матем. в школе: Педагогика, 1989. – № 6. – С. 2, 146–149.
114. Молодший В. Н. О. Коши и революция в математическом анализе первой четверти XIX века. – [21], 1978. – Вып. 23. – С. 32–55.
115. Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. – М.: Физматгиз, 1966. – 343 с.
116. Дальма А. Эварист Галуа – революционер и математик. – 2-е изд. – М.: Наука, 1984. – 112 с.
117. Инфельд Л. Эварист Галуа: Избранник богов. – М.: Мол. гвардия, 1965. – 352 с.
118. Юшкевич А. П. История математики в России до 1917 года. – М.: Наука, 1968. – 591 с.
119. Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1946. – 247 с.
120. История отечественной математики: В 4-х т., 5-ти кн. / Под ред. И. З. Штокало. – К.: Наук. думка, 1966–1970. – Т. 1–4.

121. Каган В. Ф. Лобачевский и его геометрия. – М.: ГИТТЛ, 1955. – 304 с.

122. Каган В. Ф. Лобачевский. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. – 506 с.

123. Лаптев Б. Л. Н. И. Лобачевский и его геометрия. – М.: Просвещение, 1976. – 112 с.

124. Гнеденко Б. В., Погребысский И. Б. Михаил Васильевич Остроградский. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271 с.

125. Конфорович А. Г., Сорока М. О. Остроградський. – К.: Молодь, 1980. – 216 с.

126. Прудников В. Е. Пафнутий Львович Чебышёв. – Л.: Наука, 1976. – 282 с.

127. Демьянов В. П. Рыцарь точного знания. – М.: Знание, 1991. – 192 с.

128. Крылов А. Н. Пафнутий Львович Чебышёв: Биографический очерк. – М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1944. – 31 с.

129. Монастырский М. И. Бернхард Риман. – М.: Знание, 1979. – 64 с.

130. Юшкевич А. П. Развитие понятия предела до Вейерштрасса. – [21], 1986. – Вып. 30 . – С. 11–76.

131. Дорофеева Л. В., Чернова М. Л. Карл Вейерштрасс. – М.: Знание, 1985. – 48 с.

132. Кочина П. Я. Карл Вейерштрасс (1815 – 1897). – М.: Наука, 1985. – 271 с.

133. Кочина П. Я. Софья Васильевна Ковалевская (1850 – 1891). – М.: Наука, 1981. – 312 с.

134. Воронцова Л. А. Софья Ковалевская. – М.: Мол. гвардия, 1959. – 336 с.

135. Юшкевич А. П. О развитии понятия функции. – [21], 1966. – Вып. 17. – С. 123–150. (См. и статью Н. Н. Лузина «Функция» в [13]. – С. 797–804.)

136. Маркушевич А. И. Очерки по истории аналитических функций. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1957. – 191 с.

137. Медведев Ф. А. Очерки истории теории функций действительного переменного. – М.: Наука, 1975. – 248 с.

138. Полищук Е. М. Софус Ли. – Л.: Наука, 1983. – 214 с.

139. Яглом И. М. Феликс Клейн и Софус Ли. – М.: Знание, 1977. – 64 с.

140. Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX ст. – М.: Наука, 1989. – Т. 1. – 455 с.

141. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей: В 2-х т. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. Арифметика. Алгебра. Анализ. – 432 с.; Т. 2. Геометрия. – 416 с.

142. Ожигова Е. П. Шарль Эрмит (1822–1901). – Л.: Наука, 1982. – 288 с.

143. Пуркерт В., Ильгаудс Х. И. Георг Кантор. – Х.: Основа, 1991. – 128 с.
144. Медведев Ф. А. Развитие теории множеств в XIX веке. – М.: Наука, 1974. – 232 с.
145. Медведев Ф. А. Французская школа теории функций и множеств на рубеже XIX – XX вв. – М.: Наука, 1976. – 231 с.
146. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. – 2-е изд. – М.: Наука, 1969. – 160 с.
147. Виленкин Н. Я. В поисках бесконечности. – М.: Наука, 1983. – 161 с.
148. Бурова И. Н. Развитие проблемы бесконечности в истории науки. – М.: Наука, 1987. – 134 с.
149. Конфорович А. Г. Нескінченність у математиці. – К.: Рад. шк., 1978. – 94 с.
150. Пархоменко А. С. Что такое линия. – М.: Гостехиздат, 1957.
151. Тяпкин А. А., Шибанов А. С. Анри Пуанкаре. – М.: Мол. гвардия, 1985. – 416 с.
152. Панов М. П., Тяпкин А. А., Шибанов А. С. Анри Пуанкаре и наука начала XX века // Пуанкаре А. О науке. – М.: Наука, 1983. – С. 522–559.
153. Цыкало А. Л. Александр Михайлович Ляпунов (1857 – 1918). – М.: Наука, 1988. – 248 с.
154. Шибанов А. С. Александр Михайлович Ляпунов. – М.: Мол. гвардия, 1985. – 336 с.
155. Юшкевич А. П. Исторический очерк // Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматгиз, 1958. – С. 428–458.
156. Добровольский В. А. Очерки развития аналитической теории дифференциальных уравнений. – К.: Вища шк., 1974. – 456 с.
157. Григорян А. Т. Механика от античности до наших дней. – М.: Наука, 1974. – 479 с.
158. Моисеев Н. Д. Очерки развития механики. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1961. – 478 с.
159. Геронимус Я. Л. Очерки о работах корифеев русской механики. – М.: Наука, 1970. – 520 с.
160. Майстров Л. Е. Теория вероятностей. Ист. очерк. – М.: Наука, 1967. – 320 с.
161. Майстров Л. Е. Развитие понятия вероятности. – М.: Наука, 1980.
162. Гнеденко Б. В. Из истории науки о случайном. – М.: Знание, 1981. – 64 с.
163. Игнациус Г. И. Владимир Андреевич Стеклов (1864 – 1926). – М.: Наука, 1967. – 212 с.

164. Тумаков И. М. Анри Леон Лебег. – М.: Наука, 1975. – 119 с.
165. Полишук Е. М. Вито Вольтерра. – Л.: Наука, 1977. – 114 с.
166. Полищук Е. М. Эмиль Борель (1871 – 1956). – Л.: Наука, 1980. – 168 с.
167. Рид К. Гильберт. – М.: Наука, 1977. – 368 с.
168. Николай Николаевич Лузин: Сб. к 100-летию со дня рожд. – М.: Знание, 1983. – 64 с.
169. Добровольский В. А. Дмитрий Александрович Граве. – М.: Наука, 1968. – 112 с.
170. Кравчук М. П. Математика та математики в Київському ун-ті за сто років (1834 – 1934) // Розвиток науки в Київському ун-ті за сто років. – К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1935, с. 34–69.
171. Рыжий В. С. Из истории механико-математического факультета Харьковского университета. – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2001. – 150 с.
172. Штокало Й. З. Нарис розвитку математики на Україні за 40 років радянської влади. – К.: Вид-во АН УРСР, 1958. – 83 с.
173. Ученые записки матем. отделения физ.-мат. ф-та и Харьк. матем. об-ва, посв. 150-летию ун-та. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1956. –Т. 24, серия 4. – 116 с.
174. Бородин А. И. Советские математики. – К.; Донецк: Вища шк., 1982. – 133 с.
175. Очерк развития математики в СССР. – К.: Наук. думка, 1983. – 736 с.
176. Паплаускас А. Б. Тригонометрические ряды от Эйлера до Лебега. – М.: 1966. – 276 с.
177. Харди Г. Расходящиеся ряды. – М.: ИЛ, 1951. – 504 с. (Первые две главы содержат исторические сведения.)
178. Левин В. И. Рамануджан – математический гений Индии. – М.: Знание, 1968. – 47 с.
179. Клайн М. Математика: Утрата определенности. – М.: Мир, 1984. – 447 с.
180. Ивс Г., Ньюсом К. В. О математической логике и философии математики. – М.: Знание, 1968. – 48 с.
181. Наумов И. А. Дмитрий Матвеевич Синцов. – Х.: Изд-во Харьк. ун-та, 1955. – 72 с.
182. Яглом И. М. Герман Вейль. – М.: Знание, 1967. – 48 с.
183. Вейль Г. О философии математики. – М.; Л.: Гостехиздат, 1934. – 128 с.
184. Марков А. А. О логике конструктивной математики. – М.: Знание, 1972. – 48 с.

185. Тростников В. Н. Конструктивные процессы в математике. – М.: Наука, 1975. – 256 с.
186. Дьедонне Ж. Дело Никола Бурбаки // Очерки о математике. – М.: Знание, 1973. – С. 44–45.
187. Бурбаки Н. Архитектура математики. – М.: Знание, 1972. – 18 с. (То же в [8]. – С. 245–259.)
188. Закономерности развития современной математики: Методологические аспекты. – М.: Наука, 1987. – 236 с.
189. Українська математична бібліографія. – К.: Вид-во АН УРСР, 1963. – 384 с.
190. Успенский В. А. Что такое нестандартный анализ? – М.: Наука, 1987. – 128 с.
191. Успенский В. А. Нестандартный, или неархимедов, анализ. – М.: Знание, 1983. – 62 с.
192. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. Чарльз Бэббедж. – М.: Знание, 1973. – 64 с.
193. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. От абака до компьютера. – М.: Знание, 1975. – 192 с.
194. Тадеев В. А. От живописи к проективной геометрии. – К.: Вища шк., 1988. – 232 с.
195. Об основаниях геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 528 с.
196. Прудников В. Е. Русские педагоги-математики XVIII – XIX веков. – М.: Учпедгиз, 1956. – 640 с.
197. Математическая энциклопедия: В 5-ти т. – М.: Сов. энцикл., 1977–1985. – Т. 1–5.
198. Биографический словарь деятелей естествознания и техники: В 2-х т. – М.: Изд-во БСЭ, 1958–1959. – Т. 1–2.
199. Математика в СССР за тридцать лет (1917 – 1947). – М.: Физматгиз, 1948. – 1044 с.
200. Математика в СССР за сорок лет (1917 – 1957): В 2-х т. – М.: Физматгиз, 1959. – Т. 1. – 1002 с.; Т. 2. – 820 с.
201. Математика в СССР (1958 – 1967): В 2-х т. – М.: Наука, 1969. – Т.1. – 820 с.; 1970. – Т. 2. – С. 821–1579.
202. Механіко-математичному факультету – 60 (Київський національний ун-т ім. Т. Шевченка). – К., 2000. – 248 с.
203. Очерк истории теории вероятностей // Коваленко И. Н., Гнеденко Б. В. Теория вероятностей. – К.: Вища шк., 1990. – С. 289–321.

204. Добровольский В. А. Основные задачи аналитической теории дифференциальных уравнений. – М.: Знание, 1980. – 64 с.
205. Добровольский В. А. Василий Петрович Ермаков. – М.: Наука, 1981. – 89 с.
206. Добровольський В. О. Михайло Васильович Остроградський: Нарис життя та діяльності. – К.: Ін-т матем. НАН України, 2001. – 88 с.
207. Михайло Васильович Остроградський в оцінках сучасників та нащадків: (До 200-річчя з дня народження) / Укладачі Б. П. Зайцев, С. І. Посохов, В. Д. Прокопова. – Х.: НМЦ «СД», 2001. – 96 с.
208. Вчені вузів Одеси: Бібліографічний довідник. Вип. 1. Природничі науки (1865–1945). Ч. 2. Математики. Механіки. / Упорядник І. Е. Рикун. – Одеса, 1995. – 176 с.
209. Крехівський В. В., Мартинюк В. Т., Лавренчук В. П. З історії математичного факультету Чернівецького ун-ту. – Чернівці: Рута, 1998. – 19 с.
210. Рыжий В. С. История математики. Ч. 1. Математика в древности и в средние века (Пособие для самообразования). – Х.: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2003. – 115 с.
211. Біографічний словник науковців (1934 – 2004). – К.: Ін-т матем. НАН України, 2004. –124 с.
212. Колмогоров в воспоминаниях учеников / Ред.-сост. А. Н. Ширяев, подг. текста Н. Г. Химченко. – М.: МЦНМО, 2006. – 472 с.
213. Китчер Ф. и др. Методологический анализ оснований математики. – М.: Наука, 1988. –175 с.
214. Лишевский В.П. Охотники за истиной: Рассказы о творцах науки. – М.: Наука, 1990. – 288 с.
215. Ньютон И. Математические работы / Перевод с лат., вводная статья и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского. – М.; Л.: ОНТИ, 1937. – 452 с.
216. Ньютон И. Математические начала натуральной философии / Перевод с лат. и комментарии А. Н. Крылова. – М.: Наука, 1989. – 690 с.
217. Ворович И. И. Лекции по динамике Ньютона: Современный взгляд на механику Ньютона и ее развитие. – М.; Ижевск: Ин-т компьют. иссл., 2004. – 680 с.
218. Гродзенский С. Я. Андрей Андреевич Марков (1856 – 1922). – М.: Наука, 1987. – 257 с.

219. Игошин В. И. Михаил Яковлевич Суслин (1894 – 1919). – М.: Наука, Физматлит, 1996. – 156 с.

220. Добровольская Э. М. Развитие теории цепных дробей в XVII – XVIII вв.: Автореферат дисс. на соиск. ученой степени канд. физ.-мат. наук. – М.: 1992. – 17 с.

221. Добровольский В. О., Котек В. В. Роботи з історії математики на Україні за 110 років (1850 – 1960) // Історико-математичний збірник. – К., 1963. – Вип. 4. – С. 10–36.

222. Вирченко Н. А. и др. Михаил Филиппович Кравчук (к 75-летию со дня рождения) // Укр. матем. Журнал. – 1968. – Т. 20, № 1. – С. 85–91.

223. Добровольский В. О. М. П. Кравчук – український математик // Українознавство. – 2002. – С. 242–256.

224. Добровольский В. А. Огюстен Луи Коши (к 200-летию со дня рожд.) // Юбилеи науки. – К.: Наук. думка, 1990. – С. 3–8.

225. Галай Г. І., Гриневич Г. Д. Учням про видатних математиків / За ред. доктора фіз.-мат. наук, проф. М. І. Кованцова. – К.: Рад. шк., 1976. – 160 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Навчальне видання

Рижий Володимир Семенович
Ніколенко Ірина Геннадіївна

ІСТОРІЯ МАТЕМАТИКИ

У 2 частинах

Ч. 2. Математика в XVII і XVIII століттях

Навчальний посібник

(Рос. мовою)

Коректор *П. В. Макрушина*
Макет обкладинки, комп'ютерне верстання *О. О. Літвінова*

Формат 70x100/16. Умов. друк. арк. 11,96. Тираж 300 пр. Зам. № 0306

61077, Харків, пл. Свободи, 4
Харківський національний університет імені В. Н. Каразіна
Видавництво ХНУ імені В. Н. Каразіна

Надруковано ФО-П Тітов Є.В.
61057, м. Харків, вул. Харківська набережна, 9, кв. 23
Свідоцтво про реєстрацію ВОО № 951825 від 18.01.1999 р.